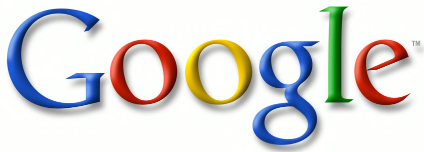

Google


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN MECHANIK.

EIN ÜBUNGSBUCH

FÜR

STUDIRENDE DER MATHEMATIK, PHYSIK, TECHNIK ETC.

VON

Dr. ARWED FUHRMANN,

ORDENTL. PROFESSOR AM KÖNIGLICHEN POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

IN ZWEI THEILEN.

ERSTER THEIL:

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN STATIK FESTER KÖRPER.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

ZWEITE, VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1879.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Als im Jahre 1867 die erste Auflage meiner Aufgaben aus der analytischen Statik erschien, beehrte der Herr Hofrath Prof. Dr. Schlömilch, dessen Assistent ich damals war, die Schrift mit einer Vorrede, der ich Folgendes entnehme:

„Wenn es schon zur tieferen Kenntniss einer fremden Sprache unerlässlich ist, nicht nur das Geschriebene oder Gesprochene zu verstehen, sondern auch selbst die Sprache reden zu können, so darf man von der Sprache der exacten Wissenschaften um so mehr behaupten, dass sie nicht blos gelernt, sondern auch geübt sein will. Findet man doch häufig genug unter seinen Zuhörern solche, keineswegs unbegabte Studirende, welche zwar alles Vorgetragene bestens verstanden haben, die sich aber äusserst ungeschickt anstellen, sobald ihnen die selbständige Lösung einer Aufgabe zugemuthet wird, die etwas mehr verlangt, als die Substitution specieller Werthe in allgemeine Formeln. Dieser Erfahrung dankt das Dresdener Polytechnikum schon seit langer Zeit die bewährte Einrichtung, den Vorträgen über reine und angewandte Mathematik besondere Repetitionen beizugeben. Letztere beschränken sich nicht auf eine blosse Wiederholung des Vorgetragenen, vielmehr suchen sie durch zahlreiche Beispiele, welche von den Studirenden theils coram omnibus weiss auf schwarz gerechnet, theils zu Hause bearbeitet werden, dem Jünger der Wissenschaft die erforderliche Gewandtheit in der Lösung von Aufgaben zu verschaffen.

Sowohl für Repetitionen als für das Selbststudium ist eine Aufgabensammlung ohne Zweifel ein willkommenes Hülfsmittel, und da in der That keine Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Mechanik existirt, welche den

Bedürfnissen der Studirenden an Universitäten und polytechnischen Instituten entspricht, so dürfte das vorliegende Buch wohl als eine zeitgemässe Erscheinung gelten. Der erste Theil desselben, welchem ein zweiter unverzüglich folgen wird, enthält nur Aufgaben aus der Statik fester Körper, wobei Probleme über die Elasticität und Festigkeit ausgeschlossen wurden, weil diese an polytechnischen Schulen in besonderen Vorlesungen ausführlich behandelt zu werden pflegen. Die meisten der mitgetheilten, für das erste Studium der analytischen Mechanik berechneten Aufgaben sind neu; Bekanntes ist selten und nur dann aufgenommen worden, wenn sich später eine Verweisung darauf nöthig machte. Bei schwereren Aufgaben findet man eine Andeutung über den Gang der Auflösung, bei leichteren ist nur das Resultat angegeben. Und damit sei diese anspruchslose, jedenfalls aber brauchbare Schrift den Lehrern und Jüngern der Wissenschaft bestens empfohlen.

Dresden, im August 1867. Schlömilch."

Ich habe diesen Worten wenig beizufügen. Zunächst möchte ich noch einmal betonen, dass die Schrift ein Uebungsbuch für Anfänger sein will, sich nicht die Aufgabe gestellt hat, alle Gebiete der analytischen Mechanik zn umfassen, als Uebungsbuch aber nicht allein für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen sich eignet, sondern von allen Denen benutzt werden kann, welche mit den Elementen der Mechanik, wie mit den Anfangsgründen der Differential- und Integralrechnung bekannt sind, also z. B. von den Angehörigen technischer Mittelschulen.

Sodann möchte ich hervorheben, dass die den einzelnen Capiteln vorausgeschickten „Zusammenstellungen" nur an die zur Anwendung gelangenden Sätze erinnern sollen, nicht aber die Herleitung derselben geben, vielmehr letztere den zahlreichen Lehrbüchern der Mechanik überlassen.

Die vorliegende zweite Auflage ist eine wesentlich verbesserte und vermehrte.

Dresden, im December 1878.

A. Fuhrmann.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Aufgaben über die Bestimmung der Masse und des Gewichtes ungleichförmig dichter Körper.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Zwischen der Masse M, dem Volumen V und der Dichtigkeit ε eines homogenen Körpers besteht bekanntlich die Beziehung

$$1)\qquad M = V\varepsilon.$$

Ist der Körper nach einem bestimmten Gesetze veränderlich dicht, bezieht man ihn auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und versteht unter ε die im Punkte xyz herrschende Dichtigkeit, so geht diese Gleichung über in

$$2)\qquad M = \int \varepsilon\, dV,$$

wobei das Integral ein einfaches, wenn man die Volumenelemente lamellenartig, also mit nur einer unendlich kleinen Dimension, wählen kann, ein doppeltes, wenn dieselben stabförmig sind, ein dreifaches, wenn sie drei unendlich kleine Ausdehnungen haben.

Im letzteren Falle hat die Gleichung für rechtwinklige Coordinaten die Form

$$3)\qquad M = \int\int\int \varepsilon\, dx\, dy\, dz,$$

in welcher ε im Allgemeinen eine Function von x, y und z ist.

Wird der Körper hingegen auf polare Coordinaten (Kugelcoordinaten) bezogen und werden diese mit r, ψ und ω bezeichnet, so geht 3) in

$$4)\qquad M = \int\int\int \varepsilon r^2 \sin\psi\, d\psi\, d\omega\, dr$$

über, worin im Allgemeinen $\varepsilon = \varphi(r, \psi, \omega)$.

Die Grenzen der Integrationen ergeben sich in jedem speciellen Falle aus der Natur derjenigen Flächen, welche den Körper einschliessen.

Manchmal ist es vortheilhaft, statt der rechtwinkligen, oder statt der Kugelcoordinaten, lieber cylindrische zu nehmen.

Ist die Masse M eines ungleichförmig dichten Körpers bekannt, so hat man seine mittlere Dichtigkeit ε_m nach der Gleichung

5) $$\varepsilon_m = \frac{M}{V}.$$

Unter Beachtung dieser Bemerkungen wird es leicht sein, die folgenden Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1. Die Dichtigkeit ε eines geraden elliptischen Cylinders von der Höhe h und den Basishalbachsen a und b, wächst proportional dem Quadrate des Abstandes von seiner Grundfläche. In der Entfernung 1 von derselben ist sie gleich k. Welches ist die Masse M und die mittlere Dichtigkeit ε_m des Cylinders?

Lösung. Nimmt man die Cylinderbasis als xy-Ebene, die Achse als z-Achse, so hat man

$$M = \int_0^h (kz^2)(ab\pi)\,dz,$$

$$M = \tfrac{1}{3}\pi\, ab\, kh^3 = (ab\pi)\, h\, (\tfrac{1}{3}kh^2);$$

$$\varepsilon_m = \tfrac{1}{3}kh^2.$$

Die mittlere Dichtigkeit ist also $\frac{1}{3}$ von der, welche in der Deckfläche herrscht.

Aufgabe 2. Ein gerader Kreiscylinder vom Basisradius a und der Höhe h besitzt eine Dichtigkeit, welche überall umgekehrt proportional dem Abstande von der Achse ist. Für die Einheit dieses Abstandes hat sie den Werth k. Man verlangt die Masse und die mittlere Dichtigkeit zu wissen.

Lösung. Für die Masse ergiebt sich

$$M = 2\pi ahk;$$

für die mittlere Dichtigkeit

$$\varepsilon_m = 2\frac{k}{a},$$

letztere ist also das Doppelte von der in der Mantelfläche stattfindenden.

Aufgabe 3. Der Basisradius eines geraden Kreiskegels ist a, die Höhe c; die Dichtigkeit ε ist proportional dem Ab-

stande von der Grundfläche und für die Einheit dieses Abstandes gleich k. Gesucht werden die Masse M und die mittlere Dichtigkeit ε_m.

Lösung. Man findet leicht, dass

$$M = \tfrac{1}{12}\pi k a^2 c^2$$

und

$$\varepsilon_m = \tfrac{1}{4} k c,$$

also die in der Kegelspitze herrschende Dichtigkeit das Vierfache der mittleren.

Aufgabe 4. Die Dichtigkeit einer Kugel ändert sich proportional dem Radius r nach concentrischen Schalen und hat den Werth k, wenn $r = 1$ ist. Der Halbmesser der Oberfläche ist a. Zu bestimmen sind die Masse und die mittlere Dichtigkeit.

Lösung. Unter Benutzung von Polarcoordinaten hat man (siehe „Zusammenstellung" Gl. 4)

$$M = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k r^3 \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\omega;$$

oder einfacher, wenn unendlich dünne Hohlkugeln verwendet werden,

$$M = \int_0^a k r \,.\, 4\pi r^2 dr.$$

Hieraus folgt:

$$M = \pi k a^4$$

und

$$\varepsilon_m = \tfrac{4}{5} a k.$$

Die mittlere Dichtigkeit ist also eben so gross, wie die im Abstande $\tfrac{4}{5}a$ vom Centrum.

Aufgabe 5. Wie Aufgabe 4, nur mit dem Unterschiede, dass sich die Dichtigkeit umgekehrt proportinal dem Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkte ändert.

Lösung. $M = 4\pi a k$; $\varepsilon_m = 3\,\frac{k}{a^2}$, d. i. das Dreifache von derjenigen Dichtigkeit, die der Kugeloberfläche zukommt.

Aufgabe 6. In der xy-Spur eines mit dem Radius c construirten Kugeloctanten, welcher auf ein rechtwinkliges System bezogen und so gelegen ist, dass der Coordinatenanfang O seinen

Mittelpunkt bildet, wird eine Gerade gezeichnet, die auf der x-Achse die Strecke $OA = a\ (< c)$ und auf der y-Achse $OB = b\ (< c)$ abschneidet.

I. Wie gross ist die Masse M desjenigen Theiles des Octanten, welcher senkrecht über dem Dreiecke OAB steht, wenn die Dichtigkeit ε proportional dem Abstande z von der xy-Ebene wächst und für $z = 1$ den Werth k hat? II. Welche Grösse besitzt sie für $a = b = c$?

Lösung. I.

$$M = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} \int_0^{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} kz\,dx\,dy\,dz,$$

$$M = \tfrac{1}{24}\,abk\,(6c^2 - b^2 - a^2).$$

II. Wenn $a = b = c$, so ist die Masse eben so gross, wie die einer homogenen Pyramide, deren Basis das Dreieck OAB, deren Höhe c und deren Dichtigkeit gleich derjenigen, welche im obersten Punkte des Kugeloctanten herrscht.

Aufgabe 7. Ein gerader Kreiscylinder (Basisradius a, Höhe c) ändert seine Dichtigkeit proportional dem Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkte der Grundfläche. Im Abstande 1 ist das Gewicht der Volumeneinheit gleich k. Das Gesammtgewicht P wird gesucht; desgleichen das mittlere Gewicht p_m.

Lösung. Benutzt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem (dessen Ursprung mit dem Basiscentrum und dessen z-Achse mit der Cylinderachse zusammenfällt), so ist

$$P = 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz;$$

bei Verwendung cylindrischer Coordinaten hingegen

$$P = 4k \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^c (r^2 + z^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Das letzte dieser Integrale ist das einfachere und liefert

$$P = \tfrac{1}{6}\pi k c a^2 (3a^2 + 2c^2),$$

mithin

$$p_m = \tfrac{1}{6}k\,(3a^2 + 2c^2).$$

Aufgabe 8. Ein mit dem Halbmesser k beschriebener Viertelkreis OAB bildet die Grundfläche eines senkrechten cylindrischen Körpers $OABCDE$, welcher oben durch eine Ebene CDE begrenzt ist. Die drei (vertical stehenden) Kanten AD, BE und OC dieses Körpers haben, der Reihe nach, die Längen a, b, c. Die Dichtigkeit ist proportional dem Quadrate des Abstandes von der Kante OC. Im Abstande 1 von OC wiegt die Volumeneinheit n Kilogramm. Man soll das Gewicht P und das mittlere Gewicht p_m (der Einheit) berechnen.

Lösung. Wird der Körper auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen x-Achse mit OA, dessen y-Achse mit OB und dessen z-Achse mit OC zusammenfällt, und wird zur Abkürzung

$$\frac{ck}{c-a}=\alpha, \quad \frac{ck}{c-b}=\beta$$

gesetzt, so hat man für das Gewicht

$$P=cn\int_0^k\int_0^{\sqrt{k^2-x^2}}(x^2+y^2)\left(1-\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)dx\,dy$$

und für das Volumen

$$V=c\int_0^k\int_0^{\sqrt{k^2-x^2}}\left(1-\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)dx\,dy.$$

Werden hingegen Polarcoordinaten (r und θ) an Stelle der rechtwinkligen (x und y) benutzt, so ist

$$P=cn\int_0^k\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\left(1-\frac{r\cos\theta}{\alpha}-\frac{r\sin\theta}{\beta}\right)r\,dr\,d\theta,$$

$$V=c\int_0^k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{r\cos\theta}{\alpha}-\frac{r\sin\theta}{\beta}\right)r\,dr\,d\theta.$$

Aus diesen Gleichungen folgt für das Gewicht des ganzen Körpers

$$P=\tfrac{1}{40}\left\{5\pi c+8(a+b-2c)\right\}nk^4$$

und für das mittlere Gewicht der Volumeneinheit desselben

$$p_m=\tfrac{3}{10}\cdot\frac{5\pi c+8(a+b-2c)}{3\pi c+4(a+b-2c)}nk^2.$$

Aufgabe 9. Auf den Achsen der x, y und z eines rechtwinkligen Coordinatensystems schneidet eine Ebene die Strecken $OA = a$, $OB = b$ und $OC = c$ ab. Welches Gewicht P hat die Pyramide $OABC$, wenn das der Volumeneinheit im Abstande 1 von O gleich k ist und es sich nach Kugelschalen, die um O concentrisch sind, proportional dem Quadrate der Entfernung von diesem Punkte ändert? Welches ist das mittlere Gewicht p_m der Pyramide?

Lösung. Man findet

$$P = \tfrac{1}{60} k a b c (a^2 + b^2 + c^2),$$

oder, wenn das Gewicht der Volumeneinheit, welches im Punkte abc herrschen würde, mit γ bezeichnet wird,

$$P = \tfrac{1}{60} a b c \gamma.$$

Für das mittlere Gewicht ergiebt sich

$$p_m = \tfrac{1}{10} k (a^2 + b^2 + c^2) = \tfrac{1}{10} \gamma.$$

Aufgabe 10. Die Dichtigkeit eines Körpers, welcher von der Fusspunktfläche eines dreiachsigen Ellipsoids umschlossen ist, ändert sich umgekehrt proportional dem Abstande vom Flächenmittelpunkte und ist für die Einheit dieses Abstandes $= k$. Wie gross ist seine Masse?

Lösung. Bezeichnet man mit r_1 den Radiusvector des allgemeinen Oberflächenpunktes, so ist

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_1} \frac{k}{r} r^2 \sin\psi \, d\omega \, d\psi \, dr = \tfrac{1}{2} k \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r_1^2 \sin\psi \, d\omega \, d\psi.$$

Da nun die Gleichung der Fusspunktfläche des aus den Halbachsen a, b und c construirten Ellipsoids für rechtwinklige Coordinaten

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2,$$

also für polare

$$r_1^2 = a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi \cos^2\omega + c^2 \sin^2\psi \sin^2\omega$$

ist, so ergiebt sich für die Masse

$$M = \tfrac{2}{3} \pi k (a^2 + b^2 + c^2),$$

d. i. die Hälfte von der einer Kugel, welche die constante Dichtigkeit $\dfrac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ und den Radius $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ hat.

Capitel I.

Aufgaben über das Gleichgewicht eines vollkommen freien Punktes.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Den Lösungen der in diesem Capitel folgenden Aufgaben liegt der bekannte Satz zu Grunde, dass man mittelst des Kräfteparallelogrammes beliebig viele Kräfte, welche an einem Punkte angreifen, zusammensetzen oder zerlegen und damit über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein des Gleichgewichts urtheilen kann.

Aufgabe 11. Auf einen Punkt wirken die Kräfte P_1, P_2, $P_3, \ldots . P_n$, welche mit den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots . \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots . \gamma_n$ (die stets in demselben Sinne zu zählen sind) bilden. Man sucht I. die Resultante R der Kräfte nach Grösse und Richtung; II. die Bedingungen für das Gleichgewicht des Punktes.

Lösung. I. Werden die Kräfte $P_1, P_2, \ldots . P_n$ in Componenten zerlegt, welche parallel zu den Coordinatenachsen wirken, werden diese Componenten mit $X_1, Y_1, Z_1, \ldots .$ bezeichnet, und wird $\Sigma(P \cos\alpha) = X$, $\Sigma(P \cos\beta) = Y$, $\Sigma(P \cos\gamma) = Z$ gesetzt, so ist

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos(R, X) = \frac{X}{R}, \cos(R, Y) = \frac{Y}{R}, \cos(R, Z) = \frac{Z}{R},$$

womit Grösse und Richtung der Resultante bestimmt sind.

II. Im Gleichgewichte befindet sich der Punkt, wenn

$$X = \Sigma(P \cos\alpha) = 0,$$
$$Y = \Sigma(P \cos\beta) = 0,$$
$$Z = \Sigma(P \cos\gamma) = 0.$$

Aufgabe 12. Ein frei beweglicher Punkt P, der die Masse 1 hat und in der Verbindungsgeraden AB von zwei festen Punkten A und B liegt, wird durch diese nach dem Newton'schen Gesetze angezogen. Die Punkte A und B haben die Massen M und m; ihr Abstand ist a. I. In welcher Entfernung x von A ist P im Gleichgewichte? II. An welcher Stelle zwischen Mond und Erde ist Gleichgewicht, wenn die Mondmasse $m = \frac{1}{81}$ der Erdmasse M genommen und als bekannt vorausgesetzt wird, dass man sich diese Massen in den Mittelpunkten der beiden Himmelskörper concentrirt denken darf.

Lösung. I. Das Gleichgewicht findet Statt, wenn

$$1)\qquad \frac{kM}{x^2} = \frac{km}{(a-x)^2};$$

hieraus folgt:

$$x = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}\, a.$$

Der andere Werth von x, welchen die quadratische Gleichung 1) liefert, giebt die Lage derjenigen Stelle an, bei welcher die Anziehungen zwar gleich gross sind, aber in demselben Sinne wirken, so dass daselbst kein Gleichgewicht herrschen kann.

II. Der gesuchte Ort liegt in dem Abstande

$$x = \tfrac{9}{10}\, a$$

vom Mittelpunkte der Erde.

Aufgabe 13. Drei feste Punkte, C_1, C_2 und C_3, welche die Massen m_1, m_2 und m_3 haben und deren gegenseitige Lage bekannt ist, wirken anziehend auf einen freibeweglichen ihrer Ebene angehörenden Punkt Q von der Masse 1. Die Anziehungen sind zugleich proportional den Entfernungen und den Massen. Es soll berechnet werden, wo der Punkt P im Gleichgewichte sein wird; auch soll der specielle Fall $m_1 = m_2 = m_3 = m$ Berücksichtigung finden.

Lösung. Legt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene $C_1 C_2 C_3$ derartig, dass $C_1 C_2$ die positive x-Achse und C_1 der Anfangspunkt derselben ist, bezeichnet man ferner die Abscissen von C_2, C_3 und Q mit a_2, a_3 und x, die Ordinaten von C_3 und Q mit b_3 und y, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts (vergl. Lösung der Aufgabe 11):

$$-m_1 x + m_2 (a_2 - x) - m_3 (x - a_3) = 0$$

und

$$-m_1 y - m_2 y + m_3 (b_3 - y) = 0.$$

Mithin ergiebt sich

$$x = \frac{a_2 m_2 + a_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y = \frac{b_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

also für $m_1 = m_2 = m_3 = m$ sehr einfach $x = \frac{1}{3}(a_2 + a_3)$ und $y = \frac{1}{3} b_3$.

Die letztgenannten Werthe gehören, wie sich leicht nachweisen lässt, dem Durchschnittspunkte der Mittellinien des Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ an, und dieser ist bekanntlich der Schwerpunkt der Fläche.

Aufgabe 14. Auf einer masselosen Geraden μ liegen die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3, ... P_m, welche sämmtlich den gegenseitigen Abstand p und die Masse M haben. Auf einer anderen masselosen Geraden ν, die μ in P_0 senkrecht schneidet, befinden sich die Punkte Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_n. Die Letztgenannten haben den gegenseitigen Abstand q und ebenfalls durchweg die Masse M. Q_0 und P_0 liegen an einer und derselben Stelle; m und n sind endlich.

Alle die genannten Punkte (auch P_0 und Q_0) wirken anziehend auf einen freibeweglichen R, welcher die Masse 1 besitzt und in der Ebene der Geraden μ und ν liegt. Die Anziehung ist gleichzeitig der Masse und der Entfernung proportional.

Man soll berechnen, wo sich der Punkt R im Gleichgewichte befindet und soll das Resultat anwenden auf die besonderen Fälle

I. dass auf beiden Geraden gleich viele anziehende Punkte liegen,

II. dass m sehr gross und n, verglichen mit m, sehr klein ist (Beispiel: $m = 1000$, $n = 3$).

Lösung. Wir nehmen die Richtung $P_0 P_m$ als die der positiven x, $Q_0 Q_n$ als die der positiven y, P_0 als Coordinatenanfang. Dann ergiebt sich für die Abscisse der Gleichgewichtsstelle (auf Grund des II. Theiles der Lösung der Aufgabe 11)

$$1) \qquad x = \frac{m+1}{2(m+n+2)} mp,$$

für die Ordinate

2) $$y = \frac{n+1}{2(m+n+2)} nq,$$

also

$$\frac{x}{y} = \frac{(m+1)mp}{(n+1)nq};$$

es verhalten sich mithin diese Abmessungen x und y, wie diejenigen auf die Geraden μ und ν bezogenen Producte, welche man erhält, wenn man die betreffende Punkteanzahl ($m+1$ oder $n+1$) mit dem Abstande der betreffenden äussersten Punkte (nämlich mit mp oder nq) multiplicirt.

Ist $m = n$, so gilt:

$$x = \tfrac{1}{4} np, \quad y = \tfrac{1}{4} nq,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}.$$

Liegt der besondere Fall II vor, so ist näherungsweise

$$x = \tfrac{1}{2} mp$$

und y ein sehr kleiner Bruchtheil von q; z. B. wird für $m = 1000$ und $n = 3$,

$$x = 0{,}498\, mp, \quad y = 0{,}006\, q,$$

wenn man auf drei Decimalstellen abrundet. Dieses aus den Gleichungen 1) und 2) Hergeleitete stimmt mit der Anschauung überein.

Aufgabe 15. Ein freibeweglicher Punkt P, der die Masse 1 hat, wird von drei festen Punkten O, A, B, welchen bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem die Abscissen 0 (Null), a und c, die Ordinaten 0, 0 und b zukommen, nach dem Newton'schen Gesetze angezogen. Der dritte der festen Puukte (B) hat die Masse m_3. Es ist zu berechnen, I. welche Massen m_1 und m_2 die Punkte O und A haben müssen, wenn P an der vorgeschriebenen Stelle xy im Gleichgewichte sein soll; II. wie gross man m_1 und m_2 für $c = \frac{a}{2}$, $b = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ nehmen muss.

Lösung. I. Man findet leicht

$$m_1 = \frac{ab - bx - (a-c)y}{ay} \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{(c-x)^2+(b-y)^2}\right)^3} \cdot m_3$$

und

$$m_2 = \frac{bx - cy}{ay} \sqrt{\left(\frac{(a-x)^2 + y^2}{(c-x)^2 + (b-y)^2}\right)^3} \cdot m_3,$$

welche Ausdrücke nur so lange für brauchbar gelten können, als sie positiv sind.

II. Für die obigen speciellen Werthe ergiebt sich

$$m_1 = m_2 = m_3,$$

was auch ohne Weiteres aus der Anschauung folgt.

Capitel II.

Aufgaben über das Gleichgewicht eines unvollkommen freien Punktes.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Auf einer ebenen, absolut starren Curve, die wir als vollkommen glatt voraussetzen, wird ein Punkt, auf welchen beliebig viele Kräfte wirken, nur dann im Gleichgewichte sein können, wenn die Resultante derselben senkrecht auf der Curventangente steht. (Den Widerstand, welchen die Curve leistet, kann man sich hierbei als eine Normalkraft in Rechnung gebracht denken.)

Ganz Aehnliches gilt, wenn der Punkt auf einer doppelt gekrümmten Linie, oder auf einer Fläche ohne Reibung beweglich ist.

Diese Bemerkungen genügen zur Lösung der Aufgaben dieses Capitels, bei welchen die Linien und Flächen als absolut glatt und absolut starr vorausgesetzt sind.

A. Gleichgewicht eines Punktes auf einer ebenen Linie.

Aufgabe 16. Auf einen materiellen Punkt, der sich nur auf der starren Linie $y = f(x)$ bewegen kann, wirken beliebig viele Kräfte in der Ebene der Curve. I. Welches sind die analytischen Bedingungen für das Gleichgewicht desselben? II. An welchen Stellen herrscht es? III. Wie gross ist der Druck D, den die Linie im Gleichgewichtszustande erleidet? IV. Wie lassen sich die gefundenen Resultate auf eine Curve anwenden, deren Gleichung in der unentwickelten Form $F(x, y) = 0$ gegeben ist?

Lösung. I. Um auf das Gleichgewicht eines vollkommen freien Punktes zurückzukommen, denken wir uns den Widerstand der Curve durch eine Normalkraft N ersetzt. Wir bezeichnen

ferner mit U und V die parallel zur x- und y-Achse (im Sinne der positiven Coordinaten) wirkenden Componenten der Resultante aller Kräfte; mit w den Winkel, welchen N mit der x-Achse einschliesst.

Dann befindet sich der Punkt offenbar in Ruhe, wenn

$$U + N\cos w = 0$$

und

$$V + N\sin w = 0.$$

Mithin ist

$$\frac{V}{U} = \tan w = -\cot\tau,$$

also

$$U + V\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

die Bedingung des Gleichgewichts. Kann $V\frac{dy}{dx}$ die Form $0 \cdot \infty$ annehmen, so ist diese Gleichung 1) mit Vorsicht zu benutzen.

II. Die Coordinaten x und y der Ruhelagen ergeben sich in jedem speciellen Falle aus dieser Gleichung und aus der der Linie selbst.

III. Der absolute Werth des von dem Punkte im Gleichgewichtszustande senkrecht zur Linie ausgeübten Druckes ist

$$D = \sqrt{U^2 + V^2}; \tag{2}$$

die Richtung desselben folgt leicht aus denen von U und V.

IV. Ist die Gleichung der Curve in der unentwickelten Form $F(x, y) = 0$ gegeben, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Die Gleichung 1) geht also in

$$U\frac{\partial F}{\partial y} - V\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

über.

Alles Andere bleibt wie vorher.

Aufgabe 17. Eine Curve von der Gleichung $y = f(x)$ rotirt mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w um die senkrecht stehende y-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems. An

welchen Stellen dieser Linie ist ein schwerer Punkt von der Masse 1 im Gleichgewichte?

Lösung. Wenn sich der Punkt an der Stelle xy befindet, so sind die auf ihn wirkenden Kräfte: $U = w^2 x$ und $V = -g$.

Nach Aufgabe 16, Gl. 1) findet also Gleichgewicht Statt, wenn

$$1)\qquad w^2 x - g\frac{dy}{dx} = 0$$

ist, also da, wo

$$x = \frac{g}{w^2}\frac{dy}{dx}.$$

Aufgabe 18. Wie Aufgabe 17, die Curve aber ein die x-Achse berührender Kreis, dessen Radius a ist und dessen Mittelpunkt auf der y-Achse liegt.

Lösung. Da hier die Kreisgleichung $x^2 + (a-y)^2 = a^2$ ist, so geht Nr. 1) der Aufgabe 17 über in

$$wx^2 \mp \frac{gx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

oder

$$x\left(w^2 \mp \frac{g}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = 0.$$

Mithin ist Gleichgewicht für $x = 0$, was selbstverständlich, und für

$$x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{g^2}{w^4}} = \pm\frac{1}{w^2}\sqrt{a^2 w^4 - g^2},$$

was nur möglich, wenn $\frac{g}{w^2} < a$, also $w > \sqrt{\frac{g}{a}}$.

An den Enden des horizontalen Durchmessers würde der Punkt nur bei unendlich grosser Winkelgeschwindigkeit in Ruhe sein können.

Dass man zu diesen Resultaten auch ohne Anwendung der Differentialrechnung zu gelangen vermag, bedarf wohl kaum besonderer Erwähnung.

Aufgabe 19. Wie Aufgabe 17, die Curve aber eine aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse, welche so liegt, dass ihr Mittelpunkt sich in der y-Achse im Abstande b vom Coordinatenanfange befindet und ihre grosse Achse parallel zu der der x ist.

Lösung. Ganz wie in der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe ergeben sich als Abscissen der Gleichgewichtsstellen, ausser dem selbstverständlichen $x = 0$,

$$x = \pm \frac{1}{aw^2} \sqrt{(aw)^4 - (bg)^2},$$

was nur so lange möglich und von Null verschieden ist, als die Winkelgeschwindigkeit $w > \frac{1}{a} \sqrt{bg}$.

Aufgabe 20. Ebenfalls wie Nr. 17, die Curve jedoch eine Hyperbel, deren Halbachsen a und b sind, deren Hauptachse $(2a)$ mit der y-Achse zusammenfällt und deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist. Gefragt: I. Wo befindet sich der Punkt im Gleichgewichte? II. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit w muss sich die Linie drehen, wenn $b = a = \frac{g}{\sqrt{2}}$ und wenn der Punkt an der Stelle $x = b$ in Ruhe sein soll?

Lösung. I. Man findet als Abscissen der Ruhestellen, ausser $x = 0$,

$$x = \pm \frac{1}{bw^2} \sqrt{(ag)^2 - (wb)^4},$$

mithin als Ordinaten

$$y = \frac{a^2 g}{b^2 w^2}.$$

Beide sind nur so lange möglich, als $w \leqq \frac{1}{b} \sqrt{ag}$ ist.

II. Für den vorgeschriebenen speciellen Fall muss $w = 1$ sein.

Aufgabe 21. Auch wie Nr. 17, die rotirende Linie aber eine gemeine Parabel, deren Achse die y-Achse und deren Halbparameter $= p$.

Lösung. Hier ergiebt sich als Gleichgewichtsbedingung

$$x\left(w^2 - \frac{g}{p}\right) = 0.$$

Wenn also $w \gtrless \sqrt{\frac{g}{p}}$, so ist der Punkt nur im Scheitel der Parabel in Ruhe; wenn $w = \sqrt{\frac{g}{p}}$ oder $p = \frac{g}{w^2}$, so ruht er an jeder Stelle derselben. (Vergl. Aufg. 33.)

Aufgabe 22. I. An welchen Stellen der Curve $y = f(x)$ ist ein materieller Punkt im Gleichgewichte, wenn auf denselben im Sinne der positiven y die constante Kraft B, im Sinne der positiven x aber die Kraft kx^2 wirkt? II. Wo liegen diese Gleichgewichtsstellen, wenn B die Schwere ist, für die Gerade $y = Ax + b$, für die Parabel $y = \frac{x^2}{2p}$ und für die Curve $y = \frac{1}{3}cx^3$?

Lösung. I. Das Gleichgewicht findet an denjenigen Stellen der Curve Statt, für welche

$$kx^2 + B\frac{dy}{dx} = 0.$$

II. Für die Gerade da, wo

$$x = \pm\sqrt{\frac{gA}{k}};$$

für die Parabel, ausser für $x = 0$, an der Stelle

$$x = \frac{g}{kp};$$

für die Curve $y = \frac{1}{3}cx^3$, entweder nur für $x = 0$, oder überall, je nachdem $k \lessgtr cg$, oder $k = cg$ ist.

Aufgabe 23. Auf einer gemeinen Cycloide, deren Anfangspunkt der der Abscissen und deren Basis die x-Achse, befindet sich ein materieller Punkt, auf welchen parallel zu den Achsen der x und der y die constanten Kräfte A und B (im Sinne der positiven Coordinaten) wirken. An welchen Stellen der Linie ist er im Gleichgewichte?

Lösung. Nach Aufgabe 16, Nr. 1) ist die Gleichgewichtsbedingung

$$U + V\frac{dy}{dx} = 0.$$

Bezeichnet a den Radius des rollenden Kreises und w den Wälzungswinkel, so hat man für die gegebene Cycloide bekanntlich die Gleichungen

$$y = a(1 - \cos w), \quad x = a(w - \sin w),$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin w}{1 - \cos w} = \cot \tfrac{1}{2}w.$$

Mithin ist der Punkt im Gleichgewichte, wenn

$$A + B \cot \tfrac{1}{2} w = 0,$$
$$w = 2 \operatorname{arc} \tan \left(-\frac{B}{A}\right);$$

z. B. für $B = A$, wenn

$$w = \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{7}{2}\pi, \ldots\ldots$$

Aufgabe 24. Ein Punkt R, der sich nur längs einer aus a und b construirten verticalen Ellipse bewegen kann, deren grosse Halbachse a wagerecht liegt, wird von zwei Gewichten beeinflusst; das eine (P) wirkt an einem schwerlosen Faden, welcher durch den Mittelpunkt geht, das andere (Q) am Punkte R vertical abwärts. Man sucht die Abscissen der Ruhelagen von R I. für beliebige gegenseitige Grössen von P und Q, II. für $P = Q$.

Lösung. I. Hier muss

$$-P\frac{x}{r} + \left(P\frac{y}{r} + Q\right)\frac{b^2 x}{a^2 y} = 0$$

sein, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Dasselbe herrscht also, ausser für $x = 0$, in den beiden oberen Quadranten da, wo

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^4 P^2 - b^4 Q^2}{c^2 P^2 + b^2 Q^2}},\quad (a^2 - b^2 = c^2),$$

oder, wenn man $a^2 - b^2 = \frac{b^2}{\gamma^2}$ setzt, da, wo

$$x = a\sqrt{\frac{P^2 - \gamma^4 Q^2}{P^2 + \gamma^2 Q^2}},$$

was nur so lange reell und von Null verschieden ist, als $P > \frac{b^2}{c^2} Q$.

II. Für $P = Q$ ist Gleichgewicht, wenn

$$x = 0,\ \text{oder}\ x = a\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - b^2}} = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - b^2},\quad a > b\sqrt{2}.$$

Letztere Abscisse lässt sich leicht construiren.

Aufgabe 25. Wie Aufgabe 24, nur geht der Faden, an welchem das Gewicht P hängt, nicht durch den Ellipsenmittelpunkt, sondern durch denjenigen Brennpunkt, der auf der Seite der positiven x liegt.

Lösung. I. Gleichgewichtsbedingung:

$$-P\frac{x - c}{r} + \left(P\frac{y}{r} + Q\right)\frac{b^2 x}{a^2 y} = 0.$$

Aus derselben folgt

$$c\,Py\,(a^2 - cx) + b^2\,Qrx = 0$$

und, wenn man beachtet, dass $a^2 - cx = ar$ ist,

$$x = -\frac{acP}{\sqrt{c^2P^2 + b^2Q^2}}.$$

II. Für $P = Q$ wird $x = -c$, die Gleichgewichtsstelle liegt also dann senkrecht über dem anderen Brennpunkte.

Aufgabe 26. Auf einer Curve von der Gleichung

$$y + \sin y = x$$

befindet sich ein materieller Punkt. Parallel zur x- und y-Achse wirken auf denselben die constanten Kräfte A und B. An welchen Stellen der Linie ist er im Gleichgewichte?

Lösung. Nach Anleitung der Gl. 3) der Lösung der Aufgabe 16 ergiebt sich

$$y = \arccos\left(-\frac{A+B}{A}\right)$$

als Ordinate der gesuchten Gleichgewichtsstelle. Dieselbe ist nur so lange reell, als $\frac{A+B}{A} \leqq 1$.

Aufgabe 27. Wo ist ein materieller Punkt von der Masse 1 auf der Curve

$$\arctan\frac{y}{x} - l\left(\frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0$$

in Ruhe, wenn er nur der Wirkung seiner eignen Schwere unterliegt?

Lösung. Man findet (wie bei Nr. 26)

$$-g\frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$$

als Gleichgewichtsbedingung. Dies ist an denjenigen Punkten erfüllt, bei welchen die rechtwinkligen Coordinaten x und y gleich, aber entgegengesetzt sind.

Beachtet man, dass die gegebene Curvengleichung für polare Coordinaten in

$$r = ae^{\theta}$$

übergeht, also eine logarithmische Spirale bedeutet, so ist dieses Resultat selbstverständlich (wegen der bekannten Lage der Tangente).

Aufgabe 28. Auf einen Punkt, der sich nur in einer röhrenförmigen logarithmischen Spirale von der Gleichung

$r = a e^{\theta}$ bewegen kann, wirken beliebige Kräfte in der Ebene, welche parallel zu den Achsen des rechtwinkligen Coordinatensystems XOY die Componenten U und V geben. I. An welchen Stellen der Curve ist der Punkt im Gleichgewichte? II. Wie gestaltet sich das Resultat, wenn nur die Schwere g wirkt? III. Wie, wenn der Punkt nur von einer Kraft $R = f(r)$ beeinflusst wird, welche ihn nach dem asymptotischen Punkte der Spirale zu ziehen strebt?

Lösung. I. Auf einer Curve von der Gleichung $y = f(x)$ würde der Punkt (nach Lösung der Aufgabe 16) im Gleichgewichte sein, wenn $U + V\frac{dy}{dx} = 0$ wäre. Mittelst der bekannten Transformationsformeln

$$x = r\cos\theta \text{ und } y = r\sin\theta$$

folgt hieraus, dass auf der Linie $r = f(\theta)$ das Gleichgewicht dann herrscht, wenn

$$U + V\frac{r'\tan\theta + r}{r' - r\tan\theta} = 0,$$

wobei r' den Quotienten $\frac{dr}{d\theta}$ bedeutet.

Für die vorliegende logarithmische Spirale sind mithin die Gleichgewichtsstellen da, wo

$$\tan\theta = \frac{U + V}{U - V}.$$

II. Wirkt nur die Schwere, so liegen diese Ruhepunkte bei

$$\theta = \tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi,\ \ldots\ldots$$

III. Wenn nur die Kraft $R = f(r)$, nach dem Mittelpunkte zu ziehend, thätig ist, so befindet sich, wie aus der obigen Gleichung für $\tan\theta$ sehr leicht folgt, der Punkt nirgends, ausser in jenem Mittelpunkte selbst, im Gleichgewichte.

Aufgabe 29. Nach welchem Gesetze muss eine Tangentialkraft T veränderlich sein, wenn sie einen Punkt, auf den parallel zur x-Achse die constante Kraft K wirkt, an jeder Stelle der Curve $y = f(x)$ im Gleichgewichte halten soll?

Lösung. Man findet sehr leicht

$$T = K\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = K\frac{y}{N};$$

die Tangentialkraft muss sich also zu der constanten Kraft K stets verhalten, wie die Curvenordinate zur Länge der zugehörigen Normale.

Aufgabe 30. I. Welcher Art muss eine Kraft U sein, die, im Sinne der positiven x wirkend, hervorbringt, dass ein schwerer Punkt von der Masse 1 auf der allgemeinen Curve $y = f(x)$ überall im Gleichgewichte ist? II. Welche Werthe hat sie, wenn die Curve α) eine gemeine Parabel vom Halbparameter p, deren Achse die y-Achse und deren Scheitel der Coordinatenanfang; β) wenn sie eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die x- und y-Achse und deren Halbachse $= a$?

Lösung. I. Nach Aufgabe 16, Gl. 1) folgt sofort

$$U = g\frac{dy}{dx} = gy'.$$

II. $$\alpha)\ U = \frac{g}{p}x; \quad \beta)\ U = -\frac{a^2 g}{2}\frac{1}{x^2}.$$

Im ersteren Falle (Parabel) muss die Kraft U also proportional dem Abstande von der y-Achse sein und für $x = 1$ die Intensität $\frac{g}{p}$ haben; im letzteren muss sie umgekehrt proportional dem Quadrate dieses Abstandes, im Sinne der negativen x und für die Einheit der Abscisse mit der Intensität $\frac{1}{2}a^2 g$ wirken.

Aufgabe 31. Auf was für einer Widerstand leistenden Linie ist ein Punkt überall im Gleichgewichte, wenn auf denselben im Sinne der positiven x eines rechtwinkligen Systems eine constante Kraft A, im Sinne der positiven y eine ebenfalls constante B wirkt?

Lösung. Nach Aufgabe 16 Gl. 1) ist die Gleichgewichtsbedingung

$$U + V\frac{dy}{dx} = 0;$$

mithin genügt diejenige Linie der gestellten Anforderung, welche die Differentialgleichung

$$A + B\frac{dy}{dx} = 0$$

hat. Aus dieser folgt

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B},$$

wobei C eine beliebige Constante. Die Linie ist also eine Gerade, welche mit der x-Achse einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $-\frac{A}{B}$ ist und die auf der y-Achse die Strecke $\frac{C}{B}$ abschneidet.

Aufgabe 32. Wie Aufgabe 31; die Kräfte sind aber folgende: 1. parallel der x-Achse, im Sinne der negativen x, eine umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes von der y-Achse wirkende und 2. die eigene Schwere des mit der Masse 1 versehenen Punktes, welche in der Richtung der negativen y thätig ist.

Lösung. Hier hat man als Gleichgewichtsbedingung

$$-\frac{k}{x^2} - g\frac{dy}{dx} = 0.$$

Aus derselben folgt durch Integration

$$x(y-c) = \frac{k}{g}.$$

Das bedeutet bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel, die als die eine Asymptote die y-Achse, als die andere eine Parallele zur x-Achse, im Abstande c, hat und deren Halbachsen $= \sqrt{\frac{2k}{g}}$ sind. Hierbei ist c eine beliebige Constante, k die Intensität, welche die parallel zur x-Achse wirkende Kraft für $x = 1$ besitzt, g die Beschleunigung der Schwere.

Aufgabe 33. Eine ebene Curve dreht sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w um die verticale y-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Auf derselben befindet sich ein schwerer Punkt von der Masse 1, der sich nicht von ihr zu entfernen vermag. Es ist zu bestimmen, welcher Art die Linie sein muss, wenn der Punkt an allen Stellen derselben im Gleichgewichte sein soll.

Lösung. Die wirkenden Kräfte sind

$$U = w^2 x \text{ und } V = -g.$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet daher

$$w^2 x - g\frac{dy}{dx} = 0.$$

Mithin genügt den Bedingungen der Aufgabe diejenige Curve, deren Gleichung

$$x^2 = \frac{2g}{w^2}(y + c),$$

d. h. jede gemeine Parabel vom Halbparameter $\frac{g}{w^2}$, deren Achse die Drehachse und deren Scheitel um die beliebige (positive oder negative) Strecke c vom Coordinatenanfange entfernt liegt. (Vergl. Aufg. 21.)

Aufgabe 34. Es soll die Linie bestimmt werden, auf welcher ein Punkt überall im Gleichgewichte ist, wenn auf denselben im Sinne der positiven y immer die constante Kraft B, im Sinne der positiven x hingegen eine variabele wirkt, die proportional der n^{ten} Potenz der Abscisse ist und für $x = 1$ die Intensität k hat.

Lösung. Nach Gl. 1) Aufgabe 16 muss die gesuchte Linie der Bedingung

$$kx^n + By' = 0$$

genügen, es muss also

$$y = -\frac{k}{B}\int x^n\,dx$$

ihre Gleichung sein. Für $n \gtrless -1$ ist dies die Curve

$$y = -\frac{k}{(n+1)B}x^{n+1} + Const.;$$

für $n = -1$

$$y = -\frac{k}{B}lx + Const.$$

(Specielle Fälle bieten die Aufgaben 31, 32 und 33.)

Aufgabe 35. Welcher Art ist die ebene Bahn, auf der sich ein materieller Punkt überall im Gleichgewichte befindet, wenn auf denselben parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Systems (und im Sinne der positiven Coordinaten) die Kräfte

$$U = Ax, \qquad V = By$$

wirken, wobei A und B positive constante Grössen sind.

Welchen Normaldruck N erleidet diese Bahn, wo ist derselbe am grössten, wo am kleinsten und welches sind diese grössten, bezüglich kleinsten Werthe?

Wie lauten die Resultate für $B=A$?

Lösung. Man findet leicht, dass die gesuchte Curve eine Ellipse ist, deren Halbachsen a und b sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Constanten A und B verhalten, sonst aber beliebig sind, deren Gleichung also

$$\frac{A}{C}x^2+\frac{B}{C}y^2=1.$$

Der Normaldruck hat den Werth

$$N=\sqrt{BC+A(A-B)x^2}.$$

Wenn $A>B$, so ist N am kleinsten für $x=0$, nämlich $\sqrt{BC}$, am grössten für $x=\sqrt{\frac{C}{A}}$ (d. i. am Ende der a-Achse), nämlich $\sqrt{AC}$. Für $A<B$ kehrt sich die Sache um.

Wird $B=A$, so geht die Bahn in einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{\frac{C}{A}}$ über und der Normaldruck hat den unveränderlichen Werth $\sqrt{AC}$.

Aufgabe 36. Auf einen materiellen Punkt wirkt im Sinne der positiven x eines rechtwinkligen Systems eine Kraft, umgekehrt proportional dem Abstande von der y-Achse, im Sinne der positiven y eine andere, umgekehrt proportional dem von der x-Achse. Beide haben für die Einheit des Abstandes die Intensität A.

Es soll ermittelt werden I. diejenige starre Curve, auf welcher der Punkt überall im Gleichgewichte ist; II. die Grösse D des Normaldruckes, den diese Linie an jeder Stelle xy auszuhalten hat; III. der Ort in derselben, an welchem dieser Druck am kleinsten ist.

Lösung. I. Nach Gl. 1) der Aufgabe 16 ergiebt sich, dass die verlangte Linie eine gleichseitige Hyperbel ($xy=c$) ist, deren Asymptoten die Coordinatenachsen und deren Halbachsen beliebig sind (nämlich $a=\sqrt{2c}$).

II. Der Normaldruck an der Stelle xy hat (nach Gl 2 der Aufgabe 16) den Werth

$$D = \frac{A}{c}\sqrt{\frac{c^2+x^4}{x^2}} = \frac{A}{xy}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{A}{c}r,$$

wobei r die Länge des Leitstrahles bedeutet.

III. Dieser Druck ist am kleinsten für

$$x = \sqrt{c} \text{ und } r = \sqrt{2c},$$

nämlich im Scheitel der Hyperbel. Von diesem aus wächst er nach rechts und links und wird unendlich gross sowohl für $x = 0$, als auch für $x = \infty$. Im Scheitel ist er $A\sqrt{\frac{2}{c}}$.

Aufgabe 37. Eine constante Kraft Q wirkt auf einen materiellen Punkt derart, dass sie ihn nach einer Stelle A hinzuziehen strebt, welche auf der x-Achse, in der Entfernung a vom Coordinatenanfange, liegt. Man soll diejenige Linie bestimmen, auf der der Punkt überall im Gleichgewichte ist.

Lösung. Bezeichnet man den Winkel zwischen der Richtung von Q und zwischen der Ordinate mit w, den Tangentenwinkel mit τ, so sind die Componenten von Q

$$U = A \sin w \text{ und } V = -A \cos w.$$

Da ferner

$$\tan w = \frac{a-x}{y}$$

ist, so lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$1) \qquad y\,dy = (a-x)\,dx.$$

Hieraus folgt: die gesuchte Linie ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius beliebig.

Anmerkung. Ohne eine Zerlegung von Q vorzunehmen, gelangt man zu der Gleichung 1) schon durch die Bemerkung, dass nur dann überall Gleichgewicht herrschen kann, wenn die Richtung von Q stets mit der der Normale zusammenfällt, wenn also $w = \tau$, mithin $\tan w = \tan \tau$, daher $\frac{a-x}{y} = \frac{dy}{dx}$ ist.

Aufgabe 38. Auf welcher Curve ist ein schwerer Punkt von der Masse 1 überall im Gleichgewichte, wenn auf denselben, ausser seiner Schwere, eine Kraft

$$Q = g\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

wirkt, die ihn immer nach dem Coordinatenanfange hinzieht?

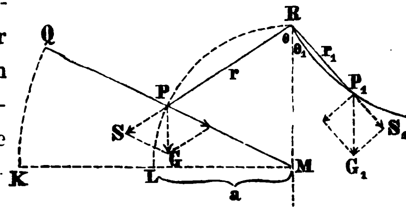
Lösung. Aus der sich leicht ergebenden Gleichgewichtsbedingung folgt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2y}}{a}\right)^2 = 1.$$

Die gesuchte Linie ist mithin eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Anziehungspunkt und deren Halbachsen sich wie $\sqrt{2}:1$ verhalten, sonst aber beliebig sind.

Aufgabe 39. Eine Gerade QPM (die man sich etwa als eine Zugbrücke denken möge) ist um M (Fig. 1) drehbar und hat das Gewicht G. Von der Mitte derselben geht ein gewichtsloser Faden PRP_1 (die Kette der Zugbrücke), der die constante Länge λ besitzt, über eine punktförmige Rolle R. An dem Ende P_1 wirkt das Gewicht G_1. Befindet sich die Gerade QPM in der horizontalen Lage KLM, so ist G_1 in R und hängt senkrecht herab (an einem unendlich kurzen Fadenstück). Es soll berechnet werden, auf was für einer Curve RP_1 das Gewicht G_1 beweglich sein muss, wenn es dem anderen Gewichte G immer das Gleichgewicht halten soll und wenn Reibung, Fadenschwere und Fadensteifheit unbeachtet bleiben.

Fig. 1.



Lösung. Die Wirkung von G kann man sich in zwei Componenten zerlegt denken, von denen die eine in die Richtung PM fällt, also aufgehoben wird, während die andere den Faden RP spannt. Diese Letztere möge S heissen.

Eben so liefert G_1 eine Componente senkrecht zur Curve RP_1, also von deren Festigkeit aufgehoben, und eine andere S_1, den Faden RP_1 spannend. Gleichgewicht findet mithin Statt, wenn $S = S_1$ ist.

Bezeichnet man nun RP_1 mit r_1, $\angle P_1RM$ mit θ_1, und entnimmt aus der Figur die sich leicht ergebenden Werthe der beiden Spannungen, so gelangt man von $S = S_1$ auf die Gleichung

$$G(\lambda - r_1)\,dr_1 = G_1\,a\,d(r_1 \cos\theta_1).$$

Dies giebt, integrirt und vereinfacht,

$$G(\lambda - \tfrac{1}{2}r_1) = G_1\,a\cos\theta_1.$$

Soll nun auch dann Gleichgewicht stattfinden, wenn QM die Lage KM hat, so muss

$$G_1 = G \sec 45^0 = G\sqrt{2}$$

genommen werden. Ferner erkennt man bei Beachtung dieser Lage, dass

$$\lambda = a\sqrt{2}$$

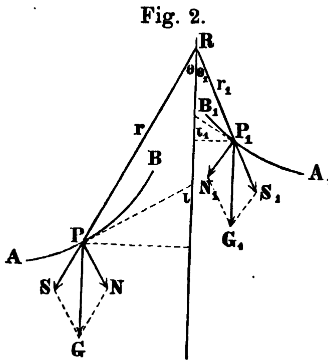
sein muss. Damit ergiebt sich

$$r_1 = 4\sqrt{2}\, a \sin^2 \frac{\theta_1}{2}.$$

Dies lehrt, dass die gesuchte Linie eine Cardioide ist, deren rollender und deren als Basis dienender Kreis den Radius $a\sqrt{2}$ haben, und deren einzelne Punkte sich sehr leicht durch Construction auffinden lassen.

Aufgabe 40. Auf zwei ebenen, absolut widerstehenden Curven AB und A_1B_1 (Fig. 2) sind zwei Punkte P und P_1 beweglich, welche die Gewichte G und G_1 haben. Dieselben sind durch ein Seil PRP_1 verbunden, das bei R über eine Rolle läuft. Diese Rolle wird als Punkt gedacht; das Seil als undehnbare Gerade; Reibung, Seilgewicht und Seilsteifheit werden nicht in Betracht gezogen. Die Gewichte G und G_1, die Länge λ des Seiles, sowie die Polargleichung $r = f(\theta)$ der Curve AB sind gegeben. Zu bestimmen ist I. welcher Art die Linie A_1B_1 sein muss, wenn die Punkte P und P_1 in jeder Stellung sich das Gleichgewicht halten sollen; II. wie sich aus den gefundenen Resultaten die der Aufgabe 39 herleiten lassen.

Fig. 2.



Lösung. I. Zerlegt man, wie in der Auflösung der vorigen Aufgabe, die Kräfte G und G_1 wieder in je zwei Componenten (S und N, S_1 und N_1), so ist auch hier wieder Gleichgewicht, wenn $S = S_1$ ist. Dies liefert

$$G\frac{\cos\tau}{\cos(\theta - \tau)} = G_1\frac{\cos\tau_1}{\cos(\theta_1 - \tau_1)},$$

oder einfacher

$$G(\cos\theta_1 + \sin\theta_1 \tan\tau_1) = G_1(\cos\theta + \sin\theta \tan\tau).$$

Drückt man nun τ und τ_1 durch r, r_1, θ und θ_1 aus, so gelangt man auf

$$d(r_1 \cos\theta_1) = k\,d(r\cos\theta),$$

worin zur Abkürzung

$$k = -\frac{G}{G_1}$$

gesetzt ist. Daraus folgt durch Integration

$$r_1 \cos\theta_1 = kr\cos\theta + Const.,$$

oder

$$r_1 \cos\theta_1 = k(\lambda - r_1)\cos\theta + Const.$$

als Gleichung der Curve A_1B_1.

II. Bei dem in Aufgabe 39 vorliegenden Falle besteht zwischen r und θ die Beziehung

$$\cos\theta = \frac{r}{2a} = \frac{\lambda - r_1}{2a}.$$

Beachtet man nun gehörig, dass $\lambda = a\sqrt{2}$ ist, wenn r_1 den Werth 0 hat, dass ferner $G_1 = G\sec 45^0 = G\sqrt{2}$ und $k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ sein muss, weil doch auch Gleichgewicht stattfinden soll, wenn P_1 mit R zusammenfällt (Fig. 1), so erhält man schliesslich

$$r_1 = 2\sqrt{2}\,a(1 - \cos\theta_1)$$

oder

$$r_1 = 4\sqrt{2}\,a\sin^2\frac{\theta_1}{2}$$

d. i. die oben (Aufgabe 39) aufgefundene Cardioide.

B. Gleichgewicht eines Punktes auf einer doppelt gekrümmten Linie.

Aufgabe 41. Auf einer doppelt gekrümmten Linie, welche bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem durch die Gleichungen $z = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ ihrer Vertical- und Horizontalprojection gegeben ist, befindet sich ein materieller Punkt, auf den beliebige Kräfte wirken.

I. Welches ist die Bedingung für das Gleichgewicht des Punktes? II. An welchen Stellen der Curve besteht es? III. Welchen Druck hat die Linie im Gleichgewichtszustande auszuhalten? IV. Wie ändern sich die gefundenen Resultate, wenn die Gleichungen der Curve in den unentwickelten Formen $F(x,z) = 0$, $\Phi(x,y) = 0$

gegeben sind, oder wenn die beiden Gleichungen $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ derjenigen Flächen als gegeben vorliegen, deren Durchschnittslinie die Curve ist?

Lösung. I. Um wieder auf einen vollkommen freien Punkt zurückzukommen (vergl. Aufgabe 16), denken wir uns den Widerstand, den die Curve leistet, durch eine Kraft N ersetzt, normal zu der Linie und unter den Winkeln λ, μ, ν gegen die Achsen.

Ferner fassen wir sämmtliche Kräfte zu dreien, U, V, W, zusammen, welche parallel zu den Achsen wirken (und zwar im Sinne der positiven Coordinaten).

Dann ist der Punkt im Gleichgewichte, wenn

$$U + N\cos\lambda = 0,$$
$$V + N\cos\mu = 0,$$
$$W + N\cos\nu = 0.$$

Bezeichnet man nun mit φ, ψ und χ die Winkel, welche die Tangente mit den Achsen bildet, so ist bekanntlich ferner

$$\cos\lambda\cos\varphi + \cos\mu\cos\psi + \cos\nu\cos\chi = 0$$

und hierbei

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\psi = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\chi = \frac{dz}{ds},$$

wenn man unter ds das Bogenelement versteht.

Hieraus ergiebt sich als Bedingung des Gleichgewichts

$$1) \qquad U + V\frac{dy}{dx} + W\frac{dz}{dx} = 0.$$

(Man vergl. Aufgabe 16, Gleichung 1.)

II. Die Coordinaten x, y, z derjenigen Stellen, an welchen es stattfindet, folgen aus dieser Gleichung 1) und aus den beiden Gleichungen der Curve.

III. Der Druck, den die Linie im Gleichgewichtszustande erleidet, ist

$$2) \qquad D = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Die Richtung desselben ergiebt sich aus denen von U, V und W.

IV. Sind die Gleichungen der Linie in der Form $F(x, z) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$ gegeben, so ist bekanntlich

$$3) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y}} \text{ und } \frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F(x, z)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, z)}{\partial z}}.$$

Das Uebrige bleibt ungeändert.

Liegen endlich die Flächengleichungen $F_1(x, y, z) = 0$ und $F_2(x, y, z) = 0$ als gegeben vor, so sind $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ bestimmt durch

$$4)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

und

$$5)\qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Nach Einsetzung der hieraus folgenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ in Gl. 1) ist dieser Fall auf den früheren zurückgeführt.

Aufgabe 42. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems ist ein Viertelkreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt der Coordinatenanfang und dessen Radius $= a$. In der xy-Ebene ein Halbkreis, welcher die x-Achse als Durchmesser, die y-Achse als Tangente und $\frac{a}{2}$ als Halbmesser besitzt. Ueber der ersten dieser beiden Linien steht eine Cylinderfläche parallel zur y-Achse; über der letzten eine andere, die mit der z-Achse gleiche Richtung hat. An welchen Stellen der Durchschnittslinie beider Flächen ist ein materieller Punkt im Gleichgewichte, wenn auf denselben drei Kräfte im Sinne der positiven Coordinaten wirken, welche proportional x, bezüglich y und z, sind und für die Einheiten dieser Coordinaten die Intensitäten A, bezüglich B und C, haben.

Lösung. Die allgemeine Bedingung für das Gleichgewicht ist nach der Lösung der Aufgabe 41 bekannt. In derselben ist für den vorliegenden Fall $U = Ax$, $V = By$, $W = Cz$, $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \sqrt{x(a - x)}$; sie geht daher in

$$2Ax + B(a - 2x) - 2Cx = 0$$

über. Folglich ist Gleichgewicht für

$$x = \frac{B}{2(B + C - A)}\,a,$$

was nur dann möglich ist, wenn

$$0 < \frac{B}{2(B + C - A)} < 1.$$

Ausserdem ist der Punkt natürlich auch noch an denjenigen beiden Stellen der Curve in Ruhe, welche in der xz-Ebene liegen.

Aufgabe 43. Eine Cylinderfläche, welche parallel zur z-Achse eines rechtwinkligen, räumlichen Coordinatensystems liegt und über einem Halbkreise steht, dessen Durchmesser die x-Achse und dessen eine Tangente die y-Achse ist, schneidet eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt und deren Halbmesser dem Cylinderdurchmesser gleichkommt. Auf der (nur für positive Coordinaten in Betracht gezogenen) Schnittlinie beider Flächen befindet sich ein Punkt P, welcher dieselbe nicht verlassen kann und auf den im Sinne der positiven Coordinaten die Kräfte U, V, W wirken, welche proportional x, y und z sind und für $x=y=z=1$ die Intensitäten A, B, C haben. Wo ist der Punkt im Gleichgewichte?

Lösung. Nach Anleitung des unter Nr. 41 Dagewesenen findet man

$$x=\frac{a(C-B)}{2(A-B)}$$

als Abscisse der Gleichgewichtsstelle.

Dieser Werth von x ist nur so lange brauchbar, als er nicht negativ ausfällt. Ausser für ihn, herrscht auch noch in denjenigen beiden Curvenpunkten Gleichgewicht, welche in der xz-Ebene liegen.

Aufgabe 44. Wie Nr. 43; die parallel zur x-Achse wirkende Kraft U aber nicht gegeben, sondern so zu bestimmen, dass der Punkt P überall auf der Durchschnittslinie im Gleichgewichte ist.

Lösung. Es ergiebt sich

$$U=\tfrac{1}{2}([C-B]a+2Bx)$$

auf dieselbe Weise, wie in der Lösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 45. Auf einen materiellen Punkt wirken die Kräfte $U=Lx$, $V=My$, $W=Nz$ (wobei L, M, N constant) im Sinne der positiven Coordinaten eines rechtwinkligen Systems. Auf was für einer räumlichen Curve befindet er sich überall im Gleichgewichte, wenn die Horizontalprojection derselben ein Halbkreis ist, dessen Durchmesser a und dessen Mittelpunkt in der x-Achse so liegt, dass die y-Achse tangirt?

Lösung. Für die Verticalprojection der gesuchten Gleichgewichtslinie findet man die Gleichung

$$(M-L)x^2-Nz^2-Max+Const.=0;$$

dieselbe ist also eine Curve zweiten Grades. Ihre specielle Art hängt von den Werthen der verschiedenen Constanten ab.

C. Gleichgewicht eines Punktes auf einer Fläche.

Aufgabe 46. Auf einen materiellen Punkt, der sich auf der Fläche $z = f(x, y)$ befindet, wirken beliebige Kräfte.

I. Welches sind die Bedingungen für das Gleichgewicht des Punktes? II. An welchen Stellen herrscht es? III. Welchen Druck hat die Fläche im Gleichgewichtszustande auszuhalten? IV. Wie lassen sich die erhaltenen Resultate auf den Fall übertragen, in welchem die Gleichung der Fläche in der unentwickelten Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben ist?

Lösung. I. Denkt man sich, wie bei den Aufgaben 16 und 41, den Widerstand der Fläche ersetzt durch eine normale Kraft N unter den Winkeln λ, μ, ν, fasst man ferner die auf den Punkt wirkenden Kräfte zu dreien, U, V, W, zusammen, welche im Sinne der positiven Coordinaten wirken, so ist Gleichgewicht, wenn

$$U + N\cos\lambda = 0,$$
$$V + N\cos\mu = 0,$$
$$W + N\cos\nu = 0.$$

Hierzu kommen, weil N senkrecht zur Fläche stehen muss, die Gleichungen

$$\cos\lambda = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\nu = +\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Daraus ergeben sich als Bedingungen des Gleichgewichts

1) $$U + W\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

2) $$V + W\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

II. Die Coordinaten x, y, z derjenigen Stellen, an welchen es stattfindet, folgen aus diesen beiden Gleichungen und aus der der Fläche.

III. Der Druck, den die Fläche im Gleichgewichtszustande auszuhalten hat, ist

3) $$D = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2};$$

die Richtung desselben ergiebt sich aus denen von U, V und W.

IV. Ist die Gleichung der Fläche in der unentwickelten Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben, so bestehen die Beziehungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Setzt man dies in die Gleichungen 1) und 2) ein, so gehen diese über in

4) $$U\frac{\partial F}{\partial z} - W\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

5) $$V\frac{\partial F}{\partial z} - W\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Das Uebrige bleibt ungeändert.

Aufgabe 47. An welcher Stelle einer Ebene, die auf allen drei Coordinatenachsen die Strecke a abschneidet, befindet sich ein Punkt von der Masse 1 im Gleichgewichte, wenn auf denselben, ausser seiner Schwere (welche im Sinne der negativen z thätig ist), parallel der x- und y-Achse zwei Kräfte wirken, die proportional x, bezüglich y, sind und für $x = y = 1$ beide die Intensität A haben?

Lösung. In den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen 1) und 2) der Lösung der Aufgabe 46 ist für den hier vorliegenden Fall $U = Ax$, $V = Ay$, $W = -g$, $z = a - x - y$; dieselben lauten daher

$$Ax + g = 0 \text{ und } Ay + g = 0.$$

Aus ihnen und aus der Gleichung

$$x + y + z = a$$

der Fläche ergeben sich die Coordinaten der Gleichgewichtsstelle zu

$$x = y = -\frac{g}{A},$$

$$z = \frac{Aa + 2g}{A}.$$

Aufgabe 48. An welchen Stellen der Ellipsoidfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

befindet sich ein materieller Punkt im Gleichgewichte, wenn auf denselben, parallel zu den Achsen und in jedem Octanten nach aussen, die constanten Kräfte A, B und C wirken?

Lösung. Man findet leicht, nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 46,

$$x = \pm \frac{Aa^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}}, \quad y = \pm \frac{Bb^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}},$$

$$z = \pm \frac{Cc^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}},$$

als Coordinaten der Gleichgewichtsstellen.

Aufgabe 49. Auf einem aus den Halbachsen a, b und c construirten Ellipsoidoctanten ist ein Punkt beweglich, auf welchen zwei Gewichte wirken; das eine, Q, hängt an dem Punkte vertical abwärts, das andere, P, an einem Faden, der durch den Mittelpunkt der Fläche geht. Es soll bestimmt werden, an welchen Stellen der Punkt im Gleichgewichte ist I. bei beliebigem P und Q, II. wenn $P = Q$.

Lösung. I. Da hier $U = -P\frac{x}{r}$, $V = -P\frac{y}{r}$, $W = -\left(P\frac{z}{r} + Q\right)$ ist, wobei r den Radiusvector des Punktes bezeichnet, so hat man als Gleichgewichtsbedingungen, wenn man $\frac{c^2}{a^2} = A$, $\frac{c^2}{b^2} = B$ setzt,

$$-P\frac{x}{r} + \left(P\frac{z}{r} + Q\right)\frac{Ax}{z} = 0$$

und

$$-P\frac{y}{r} + \left(P\frac{z}{r} + Q\right)\frac{By}{z} = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

1) $$x = 0,$$

oder

2) $$(1 - A)\,Pz = A\,Qr;$$

aus der zweiten

3) $$y = 0,$$

oder

4) $$(1 - B)\,Pz = B\,Qr.$$

Als erste Combination von 1) bis 4) hat man also

5) $$x = 0 \text{ und } y = 0;$$

als zweite

6) $$x = 0 \text{ und } (1 - B)\,Pz = B\,Qr,$$

aus welcher letzten Gleichung man leicht

7) $$y = b\sqrt{\frac{P^2 - \beta^4 Q^2}{P^2 + \beta^2 Q^2}}$$

ableitet, wenn man

$$\frac{c^2}{b^2 - c^2} = \beta^2$$

setzt. Zur Brauchbarkeit der Gleichung 7) gehört hierbei

$$P > \beta^2 Q.$$

Als dritte Combination ergiebt sich

8) $$(1 - A)\,Pz = A\,Qr \text{ und } y = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert, wenn man die Abkürzung

$$\frac{c^2}{a^2 - c^2} = \alpha^2$$

benutzt,

9) $$x = a\sqrt{\frac{P^2 - \alpha^4 Q^2}{P^2 + \alpha^2 Q^2}}, \quad P > \alpha^2 Q.$$

Die letzte Combination

$$\frac{Pz}{Qr} = \frac{A}{1 - A} = \frac{B}{1 - B}$$

wäre nur für $A = B$ möglich.

II. Für $P = Q$ ist, nach 5) bis 9), der Punkt im Gleichgewichte, wenn

10) $$x = 0 \text{ und } y = 0,$$

oder, wenn

11) $$x = 0 \text{ und } y = b\sqrt{1 - \beta^2} = b\sqrt{\frac{b^2 - 2c^2}{b^2 - c^2}},$$

oder endlich, wenn

12) $$x = a\sqrt{1-\alpha^2} = a\sqrt{\frac{a^2-2c^2}{a^2-c^2}} \text{ und } y = 0,$$

wozu

$$b > c\sqrt{2} \text{ und } a > c\sqrt{2}$$

gehört.

Aufgabe 50. Es sollen die Kräfte U und V bestimmt werden, welche parallel der x- und y-Achse auf einen schweren Punkt von der Masse 1 wirken müssen, wenn derselbe auf einer Ebene, die die Strecken a, b, c auf den Achsen abschneidet, überall im Gleichgewichte sein soll.

Lösung. In den allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht (Gleich. 1 und 2 der Aufgabe 46) ist jetzt $W = -g$, $z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$. Sie liefern daher

$$U = -\frac{c}{a}g \text{ und } V = -\frac{c}{b}g.$$

Es verhält sich mithin

$$U : V : W = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Aufgabe 51. Im Sinne der positiven Coordinaten eines räumlichen, rechtwinkligen Systems wirken auf einen Punkt immer die constanten Kräfte A, B und C. Man soll die Fläche bestimmen, auf welcher er überall im Gleichgewichte ist.

Lösung. Es ergiebt sich sehr leicht, dass die gesuchte Fläche eine Ebene ist, welche auf der x-, y- und z-Achse drei Strecken, a, b und c, abschneidet, die sich wie $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C}$ verhalten, im Uebrigen aber beliebig sind.

Aufgabe 52. Wie Nr. 51; die Kräfte aber nicht constant, sondern proportional x, bezüglich y und z; für $x = y = z = 1$ von den Intensitäten A, bezüglich B und C.

Lösung. Die Gleichgewichtsfläche ist ein Ellipsoid, dessen Halbachsenlängen a, b und c nur an die Bedingung gebunden sind, sich wie $\frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{C}}$ zu verhalten.

Capitel III.

Aufgaben über die Bestimmung des Schwerpunktes von Linien, Flächen und Körpern.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Bezeichnet man mit p das Gewicht der Volumeneinheit, mit V das Volumen des Körpers, mit ξ, η und ζ die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Coordinaten seines Schwerpunktes, mit x, y und z die eines Körperelementes, so gelten nach der Theorie der Parallelkräfte bekanntlich die Momentengleichungen

1) $$\xi \int p\, d\, V = \int x p\, d\, V,$$

2) $$\eta \int p\, d\, V = \int y p\, d\, V,$$

3) $$\zeta \int p\, d\, V = \int z p\, d\, V.$$

Aus denselben folgen ξ, η und ζ.

Es können diese Gleichungen aber auch zur Bestimmung der Schwerpunkte von Flächen und Linien angewendet werden. Obgleich Letztere nämlich ohne materiellen Inhalt, also auch ohne Gewicht sind, so pflegt man doch von ihren Schwerpunkten zu reden. Man denkt sich nämlich auf dieselben Parallelkräfte wirkend und stellt sich deren Vertheilung als gleichförmig vor, wenn man von homogenen Flächen oder Linien redet, als ungleichförmig, wenn man das Gegentheil ausspricht.

Dass die in den Gleichungen 1) bis 3) vorkommenden Integrale meist mehrfache sind, dass sich die Grenzen der Integrationen in jedem speciellen Falle aus der Natur des gerade vorliegenden Gebildes ergeben und dass sich die Formeln bedeutend vereinfachen, wenn p constant ist, braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden.

Im Nachfolgenden sind, wo nicht das Gegentheil gesagt ist, die Linien, Flächen und Körper als homogen vorausgesetzt.

A. Bestimmung des Schwerpunktes ebener Linien.

α) Parallelcoordinaten.

Aufgabe 53. Eine ebene Curve hat, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten, die Gleichung $y=f(x)$; das Gewicht der Längeneinheit derselben ist p. Welche Werthe haben die Schwerpunktscoordinaten ξ und η, wenn die Linie von der Abscisse x_0 bis zur Abscisse x_1 gerechnet wird?

Lösung. Zu Folge der Gleichungen 1) und 2) der vorstehenden Zusammenstellung hat man, wenn mit ds das Bogenelement bezeichnet wird,

$$\xi \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\,ds = \int_{x=x_0}^{x=x_1} x\,p\,ds$$

und

$$\eta \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\,ds = \int_{x=x_0}^{x=x_1} y\,p\,ds;$$

oder

$$G\xi = \int_{x_0}^{x_1} p\,x\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$G\eta = \int_{x_0}^{x_1} p\,y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

wobei

$$G = \int_{x_0}^{x_1} p\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

das Gewicht der Linie bedeutet.

Ist p constant, so gilt einfacher

$$s\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$s\eta = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

in welchen Gleichungen $s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ die Bogenlänge der Curve vorstellt.

Aufgabe 54. Wo liegt der Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens, dessen Sehne $=2\sigma$ und dessen Radius $=a$ ist? Wo liegt er für den Halbkreis?

Lösung. Man legt das rechtwinklige Coordinatensystem natürlich so, dass die Halbirungslinie des Centriwinkels mit der y-Achse zusammenfällt und der Kreismittelpunkt Coordinatenanfang wird. Dann ist ξ, die Abscisse des Schwerpunktes, gleich Null. Die Ordinate η ergiebt sich aus der Gleichung

$$s\eta=\int_{-\sigma}^{+\sigma} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

in welcher s die Bogenlänge bedeutet, zu

$$\eta=\frac{2\sigma a}{s}.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Geraden, die den Centriwinkel halbirt, derartig, dass sich sein Abstand vom Kreismittelpunkte zum Radius verhält, wie die Länge der Sehne zu der des Bogens.

Für den Halbkreis ergiebt sich $\frac{2a}{\pi}=0{,}6366a$ d. i. nahezu $\frac{7}{11}a$.

Aufgabe 55. Für die gemeine Kettenlinie

$$y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

sollen die Coordinaten ξ und η des von 0 bis x genommenen Bogens s I. berechnet, II. construirt werden; ferner soll man III. aus den in I. gefundenen Resultaten die Schwerpunktscoordinaten für einen beliebigen Kettenlinienbogen herleiten.

Lösung. I. Hier ist (vergl. Nr. 53)

$$1)\quad y'=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right) \quad\text{und}\quad 2)\quad \sqrt{1+y'^2}=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right);$$

daher

$$s=\tfrac{1}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)dx,$$

3) $$s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Ferner

$$s\xi = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^x x\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) dx,$$

also

4) $$s\xi = \tfrac{1}{2}k\left[x\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) - k\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)\right] + k^2.$$

Eben so

$$s\eta = \tfrac{1}{4}k\int\limits_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx,$$

mithin

5) $$s\eta = \tfrac{1}{8}k^2\left[e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right] + \tfrac{1}{2}kx.$$

Statt 4) und 5) kann man einfacher schreiben

6) $$s\xi = sx - ky + k^2 = sx - k(y-k),$$

7) $$s\eta = \tfrac{1}{2}(sy + kx);$$

daher ergiebt sich

$$\xi = x - \frac{k(y-k)}{s},$$

$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(y + \frac{kx}{s}\right),$$

oder, wenn man $arc\,tan\,y'$, also den Winkel, welchen die Curventangente mit der x-Achse bildet, durch τ bezeichnet und beachtet, dass (nach Gl. 1 u. 3)

$$s = ky' = k\,tan\,\tau \text{ ist},$$

$$\xi = x - (y-k)\cot\tau \text{ und}$$

$$\eta = \tfrac{1}{2}(y + x\cot\tau).$$

II. Die Construction dieser beiden Coordinaten ergiebt sich sehr leicht, wenn man bedenkt, dass $tan\,\tau = y' = \frac{\sqrt{y^2 - k^2}}{k}$. Nimmt man nämlich (Fig. 3) $AD = BC$

Fig. 3.

$=y$, so ist $\angle OAD = \angle \tau$. Wird also $BE = k$ genommen und EF senkrecht zu AD gezeichnet, so stellt OF das ξ des Schwerpunktes dar. Wird ferner BG parallel zu DA gezogen, so ist $OH = \frac{1}{2} OG$ das η.

Uebrigens kann das ξ auch dadurch erhalten werden, dass man die Curventangenten im Scheitel und im Punkte B zieht; es ist also die Abscisse des Bogenschwerpunktes gleich der des Durchschnittspunktes der Tangenten im Bogenanfange und Bogenende.

III. Bezeichnet man die Bögen AB_1 und AB_2 (Fig. 3) mit s_1 und s_2, die Coordinaten ihrer Schwerpunkte mit ξ_1, η_1, bezüglich ξ_2, η_2, und denkt sich dieselben nach I. bestimmt, so ergeben sich die des Bogens $B_1 B_2$, welche wieder ξ und η heissen mögen, aus den Momentengleichungen

$$s_1 \eta_1 + s\eta = s_2 \eta_2$$

und

$$s_1 \xi_1 + s\xi = s_2 \xi_2$$

zu

$$\xi = \frac{s_2 \xi_2 - s_1 \xi_1}{s_2 - s_1} \text{ und } \eta = \frac{s_2 \eta_2 - s_1 \eta_1}{s_2 - s_1}.$$

Anmerkung. Zu der Gleichung 6) kann man auch auf folgendem Wege gelangen: Aus der Momentengleichung

$$s\xi = \int x\, ds$$

folgt

$$s\xi = xs - \int s\, dx = sx - \int k\, dy = sx - ky + Const.$$

Hierbei hat die Constante den Werth k^2, weil für $x = 0$, $s = 0$ und $y = k$ sein muss. Daher ist

$$s\xi = sx - k(y - k).$$

Auf ähnliche Weise lässt sich die Gleichung 7) herleiten.

Aufgabe 56. Welches sind die Schwerpunktscoordinaten eines vom Wälzungswinkel Null bis zum Wälzungswinkel w gerechneten Cycloidenbogens? Welche Werthe haben dieselben für die ganze Cycloide?

Lösung. Für die vorliegende Curve ist bekanntlich

$$x = a(w - \sin w), \quad y = a(1 - \cos w),$$

wenn man mit a den Halbmesser des rollenden Kreises bezeichnet, die x-Achse mit der als Basis dienenden Geraden zusammenfallen lässt und die y-Achse durch den Anfangspunkt der Cycloide legt.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$dx = a(1 - \cos w)\,dw, \quad dy = a \sin w\,dw, \quad ds = 2a \sin \tfrac{1}{2} w\,dw.$$

Mithin ergiebt sich

$$s = 8a \sin^2 \tfrac{1}{4} w.$$

Ferner

$$s\xi = \int x\,ds = 2a^2 \int_0^w (w - \sin w) \sin \tfrac{1}{2} w\,dw,$$

$$s\xi = 4a^2 [\tfrac{4}{3} \sin^3 \tfrac{1}{2} w - (w - \sin w) \cos \tfrac{1}{2} w].$$

Eben so

$$s\eta = \int y\,ds = 2a^2 \int_0^w (1 - \cos w) \sin \tfrac{1}{2} w\,dw,$$

$$s\eta = 8a^2 [(\tfrac{1}{3} \cos^2 \tfrac{1}{2} w - 1) \cos \tfrac{1}{2} w + \tfrac{2}{3}].$$

Daher hat man

$$\xi = \frac{a}{2} \cdot \frac{\tfrac{4}{3} \sin^3 \tfrac{1}{2} w - (w - \sin w) \cos \tfrac{1}{2} w}{\sin^2 \tfrac{1}{4} w},$$

$$\eta = a \frac{(\tfrac{1}{3} \cos^2 \tfrac{1}{2} w - 1) \cos \tfrac{1}{2} w + \tfrac{2}{3}}{\sin^2 \tfrac{1}{4} w},$$

in welchen Gleichungen noch $\tfrac{1}{2}(1 - \cos \tfrac{1}{2} w)$ statt $\sin^2 \tfrac{1}{4} w$ gesetzt werden kann.

Für die ganze Cycloide $(w = 2\pi)$ ergiebt sich

$$\xi = a\pi,$$

was selbstverständlich ist, und

$$\eta = \tfrac{4}{3} a.$$

β) Polarcoordinaten.

Aufgabe 57. Eine ebene Curve hat, bezogen auf ein Polarcoordinatensystem, die Gleichung $r = f(\theta)$. Sie wird von der Anomalie θ_0 bis zur Anomalie θ_1 gerechnet. Man soll die Coordinaten ξ und η ihres Bogenschwerpunktes bestimmen, welche in Bezug auf ein solches rechtwinkliges System gemeint sind, dessen x-Achse die Achse des Polarsystems und dessen Coordinatenanfang der Pol ist.

Lösung. Bezeichnet man mit s_1 den zu θ_1, mit s_0 den zu θ_0 gehörigen Curvenbogen und denkt sich die Linie zunächst auf rechtwinklige Coordinaten bezogen, so sind ξ und η (vergl. Aufgabe 53) durch die beiden Gleichungen

$$(s_1 - s_0)\,\xi = \int\limits_{x=x_0}^{x=x_1} x\,ds \quad \text{und} \quad (s_1 - s_0)\,\eta = \int\limits_{x=x_0}^{x=x_1} y\,ds$$

bestimmt; in Bezug auf Polarcoordinaten mithin durch die zwei, unmittelbar hieraus folgenden

$$(s_1 - s_0)\,\xi = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} r\sqrt{r^2 + r'^2}\cos\theta\,d\theta$$

und

$$(s_1 - s_0)\,\eta = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} r\sqrt{r^2 + r'^2}\sin\theta\,d\theta,$$

in denen

$$s_1 = \int\limits_{0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta, \quad s_0 = \int\limits_{0}^{\theta_0} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta,$$

$$r' = \frac{dr}{d\theta}$$

ist.

Aufgabe 58. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ und η des von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$ genommenen Bogens der Cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ berechnet werden.

Lösung. Die gesuchten Coordinaten folgen hier (laut Lösung von Nr. 57) aus den Gleichungen

$$s\xi = \int\limits_{0}^{\pi} r\cos\theta\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta, \quad s\eta = \int\limits_{0}^{\pi} r\sin\theta\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta,$$

$$s = \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta,$$

wenn man

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

einführt. Es ergiebt sich hierbei sehr leicht

$$s = 4a.$$

Dann hat man weiter

$$4\,a\xi = 2\,a^2\int_0^\pi (1+\cos\theta)\cos\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta$$

und hieraus ohne Schwierigkeit

$$\xi = \tfrac{4}{5}a.$$

Endlich, zur Bestimmung von η,

$$4\,a\eta = 2\,a^2\int_0^\pi (1+\cos\theta)\sin\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta,$$

also

$$\eta = \tfrac{4}{5}a.$$

Die beiden Schwerpunktscoordinaten sind mithin einander gleich.

Aufgabe 59. Wo liegt der Schwerpunkt des von 0 bis θ gerechneten Bogens der logarithmischen Spirale $r = ae^\theta$? Wo befindet sich der des ersten Quadranten derselben?

Lösung. Die allgemeinen Gleichungen, durch welche die Schwerpunktscoordinaten ξ und η bestimmt sind, lauten wie die drei ersten in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe angeführten, nur mit dem Unterschiede, dass die Integrationsgrenzen 0 und θ, statt 0 und π, sind.

Da nun $r = ae^\theta$ ist, so ergiebt sich leicht

$$\int_0^\theta \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta = a\sqrt{2}\,(e^\theta - 1),$$

$$\int_0^\theta r\sqrt{r^2+r'^2}\cos\theta\,d\theta = \frac{a^2\sqrt{2}}{5}\left[e^{2\theta}(2\cos\theta+\sin\theta)-2\right],$$

$$\int_0^\theta r\sqrt{r^2+r'^2}\sin\theta\,d\theta = \frac{a^2\sqrt{2}}{5}\left[e^{2\theta}(2\sin\theta-\cos\theta)+1\right].$$

Mithin hat man

$$\xi = \frac{a}{5}\cdot\frac{e^{2\theta}(2\cos\theta+\sin\theta)-2}{e^\theta-1},$$

$$\eta = \frac{a}{5}\cdot\frac{e^{2\theta}(2\sin\theta-\cos\theta)+1}{e^\theta-1}.$$

Für den ersten Quadranten wird hieraus einfacher

$$\xi = \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{\pi} - 2}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1},$$

$$\eta = \frac{a}{5} \cdot \frac{2e^{\pi} + 1}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}.$$

B. Bestimmung des Schwerpunktes doppelt gekrümmter Linien.

Aufgabe 60. Eine doppelt gekrümmte Linie ist durch die Gleichungen $z = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ ihrer Vertical- und Horizontalprojection gegeben. Das Gewicht der Längeneinheit derselben werde mit p bezeichnet. Man sucht die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ für den von x_0 bis x_1 gerechneten Bogen.

Lösung. Versteht man unter P das Gewicht des ganzen Bogens und unter s seine Länge, so hat man, nach Dem, was in der „Zusammenstellung" auf Seite 36 gesagt worden ist,

$$P\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\,x\,ds, \quad P\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\,y\,ds, \quad P\zeta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\,z\,ds,$$

wobei $P = \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\,ds$ und $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx.$

Wenn p constant ist, so gehen diese Gleichungen über in

$$s\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} x\,ds, \quad s\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} y\,ds, \quad s\zeta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} z\,ds,$$

in welchen

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Hierdurch sind die drei Coordinaten ξ, η und ζ vollständig bestimmt.

Aufgabe 61. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems ist die Parabel

$$z = \frac{x^2}{4a}$$

gezeichnet; in der xy-Ebene die Parabelevolute

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}.$$

Ueber der Ersteren ist eine Cylinderfläche parallel der y-Achse, über der Letzteren eine parallel der z-Achse construirt. Wo liegt der Schwerpunkt der von 0 bis x gerechneten Durchschnittslinie dieser beiden Flächen?

Lösung. Bezeichnet man die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes wie gewöhnlich mit ξ, η und ζ, so hat man zur Bestimmung derselben (vergl. die Lösung der vorigen Aufgabe)

$$s = \frac{1}{2a}\int_0^x (x + 2a)\,dx,$$

$$s\xi = \frac{1}{2a}\int_0^x x(x + 2a)\,dx,$$

$$s\eta = \frac{1}{3a\sqrt{a}}\int_0^x \sqrt{x^3}(x + 2a)\,dx,$$

$$s\zeta = \frac{1}{8a^2}\int_0^x x^2(x + 2a)\,dx.$$

Aus diesen Gleichungen folgt sehr leicht

$$\xi = \frac{2(x + 3a)}{3(x + 4a)}x,$$

$$\eta = \frac{8x\sqrt{x}(5x + 14a)}{105\sqrt{a}(x + 4a)} = \frac{4(5x + 14a)}{35(x + 4a)}y,$$

$$\zeta = \frac{x^2(3x + 8a)}{24a(x + 4a)} = \frac{3x + 8a}{6(x + 4a)}z.$$

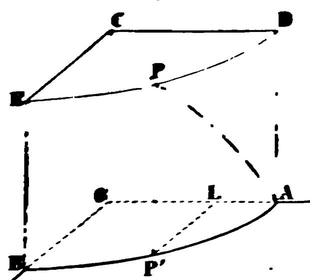
Aufgabe 62. Wo liegt der Schwerpunkt des Schraubenlinienbogens AP (Fig. 4)? Wie lassen sich seine Coordinaten ξ, η und ζ aus denen des Endpunktes P durch Construction herleiten?

Lösung. Die Schwerpunktscoordinaten sind durch die Gleichungen

$$s\xi = \int x\, ds,\quad s\eta = \int y\, ds,\quad s\zeta = \int z\, ds$$

bestimmt. Wenn nun a den Spindelradius, α den Steigungswinkel bedeutet und wenn man mit c den Ausdruck $a \tan \alpha$ (den Parameter der Schraubenlinie) bezeichnet, so lauten die Gleichungen der beiden Verticalprojectionen der Linie bekanntlich:

Fig. 4.



$$x = a \cos \frac{z}{c},\quad y = a \sin \frac{z}{c}.$$

Ferner hat man für die Länge des Bogens AP

$$s = \frac{z}{\sin \alpha}.$$

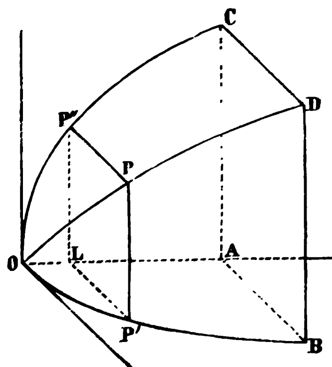
Führt man dies in die obengenannten drei Momentengleichungen ein, so ergiebt sich, indem man zwischen den Grenzen 0 und z integrirt,

$$\xi = \frac{cy}{z},\quad \eta = \frac{c(a-x)}{z},\quad \zeta = \tfrac{1}{2} z.$$

Die letzte dieser drei Schwerpunktscoordinaten ist unmittelbar als Hälfte von z bekannt; die erste und zweite lassen sich leicht als vierte Proportionalen construiren.

Aufgabe 63. In der Verticalebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist eine gemeine Cycloide $OP''C$ (Fig. 5) gezeichnet, für welche $OA = b$ der Durchmesser des erzeugenden Kreises, CA die halbe Basis und O der Scheitel ist; in der Horizontalebene eine Parabel $OP'B$, deren Halbparameter $= 2a$, deren Achse die x-Achse und deren Scheitel ebenfalls der Coordinatenanfang O. Ueber der ersten Linie ist eine Cylinderfläche parallel zur y-Achse, über der zweiten eine andere in der Richtung der z-Achse construirt.

Fig. 5.



Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ der von 0 bis x gerechneten Durchschnittslinie beider Flächen bestimmt werden.

Lösung. Man hat hier

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Ferner ist, zu Folge einer bekannten Eigenschaft der Cycloide,

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{\frac{b-x}{x}}.$$

Mithin ergiebt sich

$$ds=\sqrt{\frac{a+b}{x}}\,dx.$$

Die Schwerpunktscoordinaten sind mithin

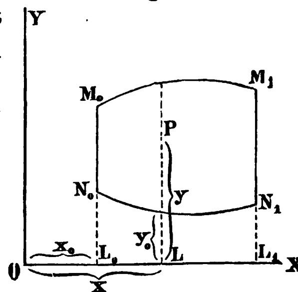
$$\xi=\tfrac{1}{3}b=\tfrac{1}{3}OA;\quad \eta=\sqrt{ab}=\tfrac{1}{2}AB,$$
$$\zeta=(\pi-\tfrac{4}{3})\frac{b}{2}=AC-\tfrac{2}{3}AO.$$

C. Bestimmung des Schwerpunktes ebener Flächen.

α) Parallelcoordinaten.

Aufgabe 64. Eine ebene Fläche $N_0M_0M_1N_1$ (Fig. 6) ist oben und unten durch die Curven M_0M_1 und N_0N_1 begrenzt, deren Gleichungen $y_1=f_1(x)$, bezüglich $y_0=f_0(x)$, gegeben sind. Das Gewicht p der Flächeneinheit ist im Allgemeinen eine Function von x und y; $[p=\varphi(x,y)]$. Welche Werthe haben die Coordinaten ξ und η des Schwerpunktes dieser Fläche? Wie lauten dieselben, wenn p constant ist?

Fig. 6.



Lösung. Wird das Gewicht der ganzen Fläche mit G bezeichnet, so hat man, nach Anleitung der zu Anfange dieses Capitels gegebenen „Zusammenstellung“, die Gleichungen

$$G\xi=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}xp\,dx\,dy,$$

$$G\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y\,p\,dx\,dy,$$

$$G = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} p\,dx\,dy,$$

in denen $y_0 = f_0(x)$, $y_1 = f_1(x)$, $p = \varphi(x, y)$ ist.

Aus denselben ergeben sich ξ und η sofort durch Division mit dem Werthe von G.

Wenn p constant ist und man den Inhalt der Fläche mit S bezeichnet, so gehen diese Gleichungen über in die einfacheren

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,x\,dx,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\,dx,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,dx,$$

aus welchen ξ und η ebenfalls durch Division folgen.

Zu diesen letzten Formeln gelangt man auch unmittelbar, wenn man sich die homogene Fläche parallel zur y-Achse in Streifen von der Höhe $y_1 - y_0$ und von der Breite dx zerlegt denkt.

Aufgabe 65. Für die gemeine Kettenlinie AB (Fig. 3 auf Seite 39), deren Gleichung

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

ist, sollen I. die Schwerpunktscoordinaten ξ und η der von 0 bis x genommenen Fläche $S = OABC$ berechnet und construirt werden. Ferner soll man II. angeben, wie aus den gefundenen Werthen von ξ und η am einfachsten die Coordinaten der Schwerpunkte der Flächen AJB und $C_1B_1B_2C_2$ hergeleitet werden können.

Lösung. I. Die Gleichungen, welche die Schwerpunktslage bestimmen, lauten hier

$$S\xi = \int_0^x xy\,dx, \quad S\eta = \tfrac{1}{2}\int_0^x y^2 dx, \quad S = \int_0^x y\,dx.$$

In denselben ist $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$; mithin ergiebt sich zunächst

$$S = \frac{k^2}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

oder, wenn man beachtet, dass der Bogen $AB = s$ den Werth $\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$ hat (siehe Lösung der Aufgabe 55),

$$S = ks.$$

Eben so leicht findet man

$$S\xi = \frac{k^2}{2}\left[x\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) - k\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) + 2k\right],$$

oder, besser dargestellt,

$$S\xi = k[sx - k(y-k)].$$

Endlich

$$S\eta = \frac{k^2}{8}\left[\frac{k}{2}\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + 2x\right]$$

$$S\eta = \frac{k}{4}\left[sy + kx\right].$$

Mithin hat man für ξ und η die Werthe

$$\xi = \frac{sx - k(y-k)}{s},$$

$$\eta = \frac{sy + kx}{4s},$$

oder, wenn man mit τ den Winkel bezeichnet, welchen die im Punkte xy construirte Curventangente mit der x-Achse bildet,

$$\xi = x - (y-k)\cot\tau,$$
$$\eta = \tfrac{1}{4}(y + x\cot\tau).$$

Vergleicht man diese Resultate mit denen, welche bei der Lösung der Aufgabe 55 unter I. für ξ und η gefunden worden sind, so sieht man, dass die Schwerpunktsabscisse des Kettenlinienbogens AB (Fig. 3) eben so gross ist, wie die der Kettenlinienfläche $OABC$ und dass die Ordinate des Schwerpunktes jenes Bogens dem Doppelten von der dieser Fläche gleichkommt.

Hiermit ist die Construction der Schwerpunktscoordinaten ξ und η durch die bei Nr. 55 angegebene erledigt.

II. Wird der Inhalt der Fläche AJB mit S_1 bezeichnet und werden die Coordinaten ihres Schwerpunktes ξ_1 und η_1 genannt, so sind sie durch die Momentegleichungen

$$S\xi + S_1\xi_1 = (S + S_1)\frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}x^2y$$

und

$$S\eta + S_1\eta_1 = (S + S_1)\frac{y}{2} = \tfrac{1}{2}xy^2$$

bestimmt.

Auf dieselbe Weise ergeben sich auch die Schwerpunktscoordinaten der Fläche $C_1B_1B_2C_2$ (Fig. 3), indem man dieselbe als Differenz der beiden Flächen OAB_2C_2 und OAB_1C_1 auffasst.

Aufgabe 66. Wo liegt der Schwerpunkt derjenigen Fläche, welche von der ganzen Cissoide

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}} = \sqrt{\frac{x^3}{b - x}}$$

und ihrer Asymptote begrenzt wird?

Lösung. Die Fläche liegt bekanntlich symmetrisch gegen die x-Achse; es ist also blos das ξ des Schwerpunktes zu berechnen, weil $\eta = 0$ sein muss. Hierzu hat man die Gleichungen

$$S\xi = \int_0^b x\sqrt{\frac{x^3}{b - x}}\,dx$$

und

$$S = \int_0^b \sqrt{\frac{x^3}{b - x}}\,dx.$$

Diese Integralwerthe können unter Benutzung der naheliegenden Substitution

$$\frac{x}{b} = \sin^2\theta$$

sehr leicht ermittelt werden. Man kann jedoch auch partielle Integration anwenden; dieselbe liefert:

$$S\xi = 5\int_0^b x^{\frac{3}{2}}\sqrt{b - x}\,dx.$$

Schreibt man hierfür

$$S\xi = 5\int_0^b \frac{x^{\frac{3}{2}}(b-x)}{\sqrt{b-x}}\,dx = 5b\int_0^b \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b-x}}\,dx - 5\int_0^b \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{b-x}}\,dx,$$

so hat man

$$S\xi = 5bS - 5S\xi,$$

mithin

$$\xi = \tfrac{5}{6}b$$

als die gesuchte Schwerpunktsabscisse.

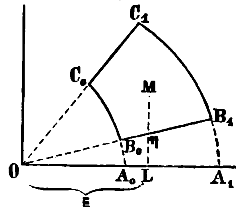
β) Polarcoordinaten.

Aufgabe 67. Eine Fläche $B_0C_0C_1B_1$ (Fig. 7) ist durch zwei Curven, B_0C_0, B_1C_1, deren Gleichungen

$$r_0 = f(\theta), \quad r_1 = \varphi(\theta)$$

sind, und durch zwei Leitstrahlen B_0B_1, C_0C_1, welche zu den Anomalien $A_0OB_0 = \theta_0$, $A_0OC_0 = \theta_1$ gehören, begrenzt.

Fig. 7.



Es sollen die rechtwinkligen Coordinaten ξ und η des Schwerpunktes dieser Fläche bestimmt werden.

Lösung. Wird mit S der Inhalt der Fläche $B_0C_0C_1B_1$ bezeichnet, so sind die gesuchten Coordinaten ξ und η durch die Momentegleichungen

$$S\xi = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr,$$

$$S\eta = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr,$$

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} r\, d\theta\, dr,$$

bestimmt, welche sich einfacher in den Formen

$$S\xi = \tfrac{1}{3}\int_{\theta_0}^{\theta_1} (r_1^3 - r_0^3)\cos\theta\, d\theta,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3}\int_{\theta_0}^{\theta_1} (r_1^3 - r_0^3) \sin\theta \, d\theta,$$

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} (r_1^2 - r_0^2) \, d\theta$$

geben lassen.

Aufgabe 68. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes, dessen Radius a und dessen Centriwinkel γ ist? Wo der des Halbkreises? Wo der des Quadranten?

Lösung. Der gesuchte Schwerpunkt liegt offenbar auf der Halbirungslinie des Centriwinkels. Zur Bestimmung seines Abstandes ξ vom Mittelpunkte hat man (nach der Lösung der vorigen Aufgabe), wenn das Kreiscentrum als Pol, die Winkelhalbirungslinie als Achse des Coordinatensystems genommen wird,

$$S\xi = \tfrac{1}{3}\int_{-\frac{1}{2}\gamma}^{+\frac{1}{2}\gamma} a^3 \cos\theta \, d\theta,$$

$$S\xi = \tfrac{2}{3} a^3 \sin \tfrac{1}{2}\gamma;$$

daher

$$\xi = \tfrac{4}{3} a \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\gamma}.$$

Für den Halbkreis ist dies

$$\xi = \frac{4}{3\pi} a = 0{,}4244\, a;$$

für den Quadranten

$$\xi = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} a = 0{,}6002\, a.$$

Aufgabe 69. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ und η für diejenige Fläche berechnet werden, welche begrenzt wird 1. von dem von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gerechneten Bogen der Cardioide

$$r_1 = a(1 + \cos\theta),$$

2. von dessen letztem Leitstrahle, 3. von der zugehörigen halben Peripherie des als Basis dieser Cardioide dienenden Kreises und 4. von der zu dieser halben Peripherie gehörenden Durchmesserverlängerung.

Lösung. Da hier (vergl. die Lösung der Aufgabe 67) $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $r_0 = a \cos \theta$, $r_1 = a(1 + \cos \theta)$ ist, so sind die zu ermittelnden Coordinaten ξ und η durch die Gleichungen

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos \theta)\, d\theta,$$

$$S\xi = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta) \cos \theta \, d\theta,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta$$

bestimmt. Aus denselben folgt bei Ausführung der Integrationen

$$S = \tfrac{1}{4} (\pi + 4) a^2,$$
$$S\xi = \tfrac{1}{4} (\pi + 4) a^3,$$
$$S\eta = \tfrac{7}{6} a^3.$$

Mithin hat man

$$\xi = a \text{ und } \eta = \frac{14}{3(\pi + 4)} a.$$

Aufgabe 70. Für den von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gerechneten Sector der Spirale des Archimedes ($r = a\theta$) sollen die Coordinaten ξ und η des Schwerpunktes bestimmt werden.

Lösung. Nimmt man den Pol des Systems, auf welches sich die Gleichung $r = a\theta$ bezieht, als Anfangspunkt des ξ, die Achse als seine Richtung und senkrecht dagegen das η, so hat man zur Bestimmung der beiden gesuchten Coordinaten die Gleichungen (vergl. Lösung der Aufgabe 67)

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \, d\theta,$$

$$S\xi = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^3 \cos \theta \, d\theta,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^3 \sin \theta \, d\theta.$$

Dieselben liefern

$$S = \tfrac{1}{48}\pi^3 a^2,$$
$$S\xi = \tfrac{1}{24}(\pi^3 - 24\pi + 48)\, a^3,$$
$$S\eta = \tfrac{1}{4}(\pi^2 - 8)\, a^3.$$

Daher ist

$$\xi = \frac{2(\pi^3 - 24\pi + 48)}{\pi^3} a,$$

$$\eta = \frac{12(\pi^2 - 8)}{\pi^3} a.$$

Aufgabe 71. Welche Werthe haben die Coordinaten ξ und η des von 0 bis θ gerechneten Sectors der logarithmischen Spirale $r = ae^\theta$?

Lösung. Nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 67 hat man hier

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^\theta e^{2\theta}\, d\theta,$$

$$S\xi = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^\theta e^{3\theta} \cos\theta\, d\theta,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^\theta e^{3\theta} \sin\theta\, d\theta.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt sofort

$$S = \tfrac{1}{4} a^2 (e^{2\theta} - 1);$$

die Integrale

$$J = \int e^{3\theta} \cos\theta\, d\theta \text{ und } J_1 = \int e^{3\theta} \sin\theta\, d\theta,$$

welche in den beiden letzten vorkommen, liefern

$$J = e^{3\theta} \sin\theta - 3J_1,$$
$$J_1 = -e^{3\theta} \cos\theta + 3J.$$

Mithin hat man

$$J = \tfrac{1}{10} e^{3\theta} (3\cos\theta + \sin\theta),$$
$$J_1 = \tfrac{1}{10} e^{3\theta} (3\sin\theta - \cos\theta),$$

also

$$S\xi = \tfrac{1}{30} a^3 [e^{3\theta}(3\cos\theta + \sin\theta) - 3],$$
$$S\eta = \tfrac{1}{30} a^3 [e^{3\theta}(3\sin\theta - \cos\theta) + 1];$$

folglich

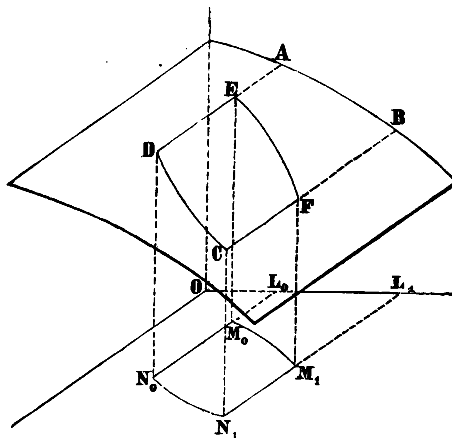
$$\zeta = \tfrac{2}{15} a \frac{e^{3\theta}(3\cos\theta + \sin\theta) - 3}{e^{2\theta} - 1},$$

$$\eta = \tfrac{2}{15} a \frac{e^{3\theta}(3\sin\theta - \cos\theta) + 1}{e^{2\theta} - 1}.$$

D. Bestimmung des Schwerpunktes von Cylinderflächen.

Aufgabe 72. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist eine homogene Cylinderfläche gegeben, welche parallel der y-Achse liegt und deren Leitlinie eine in der xz-Ebene gezeichnete Curve AB (Fig. 8) von der Gleichung $z = \varphi(x)$ ist. Aus derselben wird durch einen verticalen Cylinder, der über der Fläche $M_0 M_1 N_1 N_0$ steht, ein Stück $CDEF$ herausgebrochen. Die Curven $M_0 M_1$ und $N_0 N_1$ sind durch die Gleichungen $y_0 = f_0(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ bestimmt. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ der Fläche $CDEF$, deren Inhalt mit S bezeichnet werden möge, berechnet werden.

Fig. 8.



Lösung. Da z nur eine Function von x, nicht auch von y, ist, so darf man sich die Fläche $CDEF$ in streifenförmige Elemente zerlegt denken, welche die Länge $y_1 - y_0$ und die Breite ds haben (wobei ds das Differential des Bogens AB bedeutet). Wird nun OL_0 mit x_0, OL_1 mit x_1 bezeichnet, so sind die gesuchten Schwerpunktscoordinaten durch die Gleichungen

$$S\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} x(y_1 - y_0)\, ds,$$

$$S\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} \tfrac{1}{2}(y_1 + y_0)(y_1 - y_0)\, ds = \tfrac{1}{2}\int_{x=x_0}^{x=x_1} (y_1^2 - y_0^2)\, ds,$$

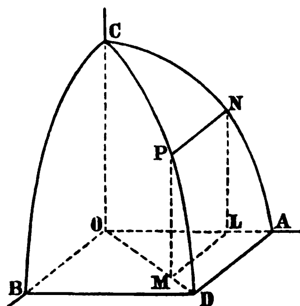
$$S\zeta = \int\limits_{x=x_0}^{x=x_1} z\,(y_1 - y_0)\,ds,$$

$$S = \int\limits_{x=x_0}^{x=x_1} (y_1 - y_0)\,ds,$$

bestimmt, in welchen $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$ ist.

Aufgabe 73. Von einem Klostergewölbe, dessen Bogen CNA ein Viertelkreis ist, sind (Fig. 9) die Dimensionen $OA = OC = a$ und $AD = OB = b$ gegeben. Man sucht die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ des Gewölbflächentheiles $CNADPC$.

Fig. 9.



Lösung. ξ, η und ζ sind hier durch die Gleichungen

$$S\xi = \int\limits_{x=0}^{x=a} xy\,ds, \quad S\eta = \tfrac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{x=a} y^2\,ds,$$

$$S\zeta = \int\limits_{x=0}^{x=a} yz\,ds, \quad S = \int\limits_{x=0}^{x=a} y\,ds$$

bestimmt, wenn mit S der Inhalt der Gewölbfläche $CNADPC$, mit ds das Differential des Bogens CN bezeichnet wird und wenn die Coordinaten von P x, y und z genannt werden.

In diesen Gleichungen ist

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx.$$

Daraus ergiebt sich leicht

$$S = ab,$$

(also der Satz: Fläche $CNADPC$ gleich dem Doppelten ihrer Horizontalprojection).

Ferner, etwa unter Anwendung der Substitution

$$\frac{x}{a} = \cos u,$$

$$S\xi = \tfrac{1}{4}a^2 b\pi.$$

Sodann folgt

$$S\eta = \frac{b}{2a} S\xi, \text{ also } S\eta = \tfrac{1}{8} a b^2 \pi.$$

Endlich

$$S\zeta = \tfrac{1}{2} a^2 b.$$

Die gesuchten Schwerpunktscoordinaten sind mithin

$$\xi = \tfrac{1}{4}\pi a, \quad \eta = \tfrac{1}{8}\pi b, \quad \zeta = \tfrac{1}{2} a,$$

d. i. ξ nahezu gleich $\frac{11}{14} a$, η nahezu $\frac{11}{28} b$.

Aufgabe 74. Die Wölblinie CNA des Gewölbes $CNADPC$ (Fig. 9) ist eine **gemeine Kettenlinie**, deren Scheitel in C liegt. Gegeben sind die Dimensionen $OA = a$, $AD = b$, $OC = c$ und der Parameter k, welcher mit a und c bekanntlich durch die Gleichung $c + k = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}\right)$ zusammenhängt. Es sollen die Coordinaten ξ, η und ζ, ξ_a, η_a und ζ_a der Schwerpunkte der Gewölbflächen CNP und CAD berechnet werden.

Lösung. Bezeichnet man den Inhalt der Fläche CNP mit S, die Länge des Bogens CN mit s, die Coordinaten von P mit x, y und z, so sind ξ, η und ζ durch die Gleichungen

$$S = \frac{b}{2a}\int_0^x x\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) dx,$$

$$S\xi = \frac{b}{2a}\int_0^x x^2\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) dx,$$

$$S\eta = \frac{b^2}{4a^2}\int_0^x x^2\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) dx = \frac{b}{2a} S\xi,$$

$$S\zeta = \frac{b}{2a}\int_0^x \left[c + k - \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)\right] x\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) dx$$

bestimmt. Aus denselben folgt zunächst

$$S = \frac{bk}{2a}\left[x\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) - k\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) + 2k\right],$$

$$S\xi = \frac{bk}{2a}\left[\left(x^2 + 2k^2\right)\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) - 2kx\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)\right],$$

$$S\eta=\frac{b^2k}{4a^2}\left[\left(x^2+2k^2\right)\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right)-2kx\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)\right],$$

$$S\zeta=\frac{b}{2a}\left[k\left(c+k\right)\left\{x\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right)-k\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)+2k\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{k}{2}\left\{\frac{k}{2}\left(e^{2\frac{x}{k}}-e^{-2\frac{x}{k}}\right)x+x^2-\frac{k^2}{4}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)^2\right\}\right].$$

Hierfür kann man besser schreiben, wenn man beachtet, dass $s=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right)$ ist und dies sich leicht construiren lässt (vergl. Aufg. 55),

$$S=\frac{b}{a}\Big[sx-k\,(c-z)\Big],$$

$$S\xi=\frac{b}{a}\Big[(x^2+2k^2)\,s-2kx\,(c+k-z)\Big],$$

$$S\eta=\frac{b^2}{2a^2}\Big[(x^2+2k^2)\,s-2kx\,(c+k-z)\Big],$$

$$S\zeta=\frac{b}{2a}\Big[2\,(c+k)\,\{sx-k\,(c-z)+k^2\}$$
$$-\{s\,(c+k-z)\,x+\frac{k}{2}\,(x^2-s^2)\}\Big].$$

Hieraus folgen ξ, η und ζ sogleich durch Division.

Nimmt man $x=a$, $z=0$ und versteht unter s_a die Länge des Bogens CNA, unter S_a den Inhalt der Fläche CAD, so gehen die vorigen Gleichungen in

$$S_a=\frac{b}{a}\,(as_a-kc)=b\left(s_a-\frac{kc}{a}\right),$$

u. s. w. über, aus denen dann wiederum die Schwerpunktscoordinaten ξ_a, η_a und ζ_a durch Division sich ergeben.

E. Bestimmung des Schwerpunktes von Umdrehungsflächen.

Aufgabe 75. Eine Curve DF (Fig. 10), deren Gleichung $z=f(x)$ ist, dreht sich um die x-Achse eines rechtwinkligen Systems, bis sie aus der xz-Ebene in die xy-Ebene kommt. Man verlangt die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes von dem dadurch entstandenen Quadranten der Umdrehungsfläche, wenn diese von $OL_0=x_0$ bis $OL_1=x_1$ gerechnet wird.

Lösung. Es sei LMN ein zur x-Achse senkrechter Querschnitt an beliebiger Stelle, $OL = x$, $LN = z$, $EN = s$. Denkt man sich dann die Fläche in unendlich schmale Streifen von der Breite ds zerlegt, so ist ξ durch die Gleichungen

$$S\xi = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} xz\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

und

$$S = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

bestimmt.

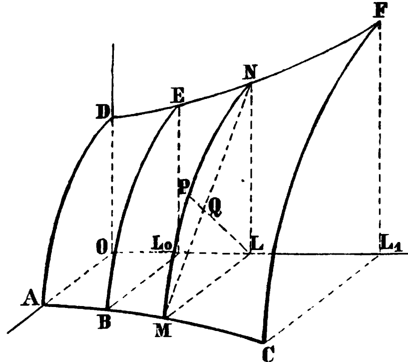


Fig. 10.

Ferner erhält man η und ζ, welche offenbar einander gleich sein müssen, aus der Bemerkung, dass der Schwerpunkt Q des Querschnittes LMN, als derjenige eines Kreisbogens, nach Lösung der Aufgabe 54 so liegen muss, dass sich

$$LQ : LP = \text{Sehne } MN : \text{Bogen } MPN$$

verhält. Es ergiebt sich nämlich hieraus die Gleichung

$$S\eta = S\zeta = \int_{x_0}^{x_1} z^2\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Aufgabe 76. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ der Fläche $ADFC$ (Fig. 10) bestimmt werden, unter der Voraussetzung, dass die rotirende Curve DF die gemeine Kettenlinie

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

ist.

Lösung. Wird mit S der Inhalt der Fläche $ADFC$, mit s die Länge des Kettenlinienbogens DF, mit x die von OL_1 bezeichnet, so hat man

$$S = \frac{\pi}{8}k\int_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx,$$

$$S\xi = \frac{\pi}{8} k \int_0^x x\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx,$$

$$S\eta = S\zeta = \tfrac{1}{8}k^2 \int_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^3 dx.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$S = \frac{\pi}{8} k \left[\frac{k}{2}\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + 2x\right],$$

$$S\xi = \frac{\pi}{4}\left[x\frac{k^2}{4}\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + \frac{k}{2}x^2 - \frac{k^3}{8}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)^2\right],$$

$$S\eta = S\zeta = \tfrac{1}{24}k^3\left[\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)^3 + 12\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)\right].$$

Beachtet man, dass $s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$ und dass sich dies leicht construiren lässt (vergl. Lösung der Aufg. 55), so wird man hierfür besser schreiben

$$S = \tfrac{1}{4}\pi(sz + kx),$$
$$S\xi = \tfrac{1}{8}\pi[2sxz + k(x^2 - s^2)],$$
$$S\eta = S\zeta = s\left(\tfrac{1}{3}s^2 + k^2\right).$$

Mithin sind die zu berechnenden Schwerpunktscoordinaten

$$\xi = \frac{2sxz + k(x^2 - s^2)}{2(sz + kx)},$$

$$\eta = \zeta = \frac{4s(s^2 + 3k^2)}{3\pi(sz + kx)}.$$

Aufgabe 77. Um die z-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems dreht sich die gemeine Kettenlinie $z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ ein volles Mal. Wo liegt der Schwerpunkt des dadurch erzeugten Kettenconoids?

Lösung. Da die Fläche symmetrisch zur z-Achse ist, so muss der Schwerpunkt offenbar auf dieser liegen. Für seinen Abstand ζ vom Coordinatenanfange hat man, wenn mit S die Oberfläche des Conoids bezeichnet wird und unbestimmte Integration zur Anwendung kommt,

$$S\zeta = \frac{\pi k}{2}\int x\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx,$$

$$S\zeta = \frac{k\pi}{2}\left[\frac{k}{2}x\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + x^2 - \frac{k^2}{4}\left(e^{2\frac{x}{k}} + e^{-2\frac{x}{k}}\right)\right] + Const.$$

Da für $x = 0$ auch $S = 0$ sein muss, so ergiebt sich

$$Const. = \frac{k\pi}{2}\left(\frac{k^2}{2}\right),$$

mithin

$$S\zeta = \frac{k\pi}{2}\left[\frac{k}{2}x\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + x^2 - \frac{k^2}{4}\left(e^{2\frac{x}{k}} + e^{-2\frac{x}{k}}\right) + \frac{k^2}{2}\right],$$

oder besser, wenn unter s der Kettenlinienbogen verstanden wird,

$$S\zeta = \frac{\pi}{2}\left[2sxz - k(s^2 - x^2)\right].$$

Für den Inhalt der Umdrehungsfläche findet man leicht

$$S = 2\pi[sx - k(z - k)],$$

also ist

$$\zeta = \frac{1}{4}\,\frac{2sxz - k(s^2 - x^2)}{sx - k(z - k)}$$

der Abstand des Schwerpunktes vom Coordinatenanfange.

Aufgabe 78. Eine in der xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems gezeichnete Curve von der Gleichung $y = f(x)$ dreht sich um die x-Achse um einen Winkel α. Es sollen die Coordinaten des Schwerpunktes der hierdurch erzeugten Rotationsfläche berechnet werden, unter der Voraussetzung, dass die Curve von der Abscisse x_0 bis zur Abscisse x_1 gerechnet wird.

Lösung. Man denke sich an der Stelle x einen Querschnitt parallel zur yz-Ebene und an der Stelle $x + dx$ noch einen. Zwischen denselben liegt dann ein Flächenelement dS, dessen Inhalt

1) $$dS = \alpha y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

ist; der Schwerpunkt desselben möge Q heissen; seine drei Coordinaten QQ', QQ'' und QQ'''. Dann hat man zur Bestimmung von ξ, η und ζ die Gleichungen

$$S\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} QQ'''.\, dS,$$

$$S\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} QQ''.dS,$$

$$S\zeta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} QQ'.dS.$$

Hierin ist dS nach Gleichung 1) bekannt. QQ''' ist der Abscisse x gleich. Für QQ'' und QQ' findet man leicht

$$QQ'' = \frac{\sin\alpha}{\alpha} y, \quad QQ' = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha} y,$$

wenn man den bekannten Satz für die Lage des Schwerpunktes eines Kreisbogens zur Anwendung bringt (Lösung der Aufg. 54).

Es ist daher

$$S\xi = \alpha \int_{x_0}^{x_1} xy\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$S\eta = \sin\alpha \int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$S\zeta = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

also

$$S\zeta = \tan\frac{\alpha}{2}\,S\eta.$$

Da zu diesen Gleichungen noch die aus 1) folgende

$$S = \alpha \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

tritt, so sind hiermit die gesuchten Schwerpunktscoordinaten vollständig bestimmt.

Aufgabe 79. Wo liegt der Schwerpunkt eines halben Kugelzweiecks, dessen Seiten zwei Meridiane sind, dessen Winkel α und dessen Kugelradius a ist? Wo liegt der des Octanten der Kugelfläche?

Lösung. Legt man das Coordinatensystem so, dass die zu den Seiten des Zweiecks gehörige Kugelachse die x-Achse ist, der Kugelmittelpunkt der Anfangspunkt der Abscissen, die Ebene der einen Zweiecksseite die xy-Ebene, so hat man zur Bestimmung der auf dieses System bezogenen Schwerpunktscoordinaten (nach Anleitung der Lösung der vorigen Aufgabe) die Gleichungen

$$S\xi = \alpha \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad S\eta = \text{ u. s. w.}$$

Dieselben liefern nach Ausführung der Integrationen

$$S\xi = \tfrac{1}{2} a^3 \alpha, \quad S\eta = \tfrac{1}{4} \pi a^3 \sin \alpha, \quad S\zeta = \tfrac{1}{2} \pi a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad S = a^2 \alpha,$$

welches letztere Resultat auch aus der elementaren Geometrie bekannt ist.

Man hat daher

$$\xi = \tfrac{1}{2} a, \quad \eta = \tfrac{1}{4} \pi a \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \zeta = \tfrac{1}{2} \pi a \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha},$$

als Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes.

Für den Octanten der Kugelfläche ergiebt sich hieraus

$$\xi = \eta = \zeta = \tfrac{1}{2} a.$$

Aufgabe 80. Auf einer Rotationsfläche, welche dadurch entstanden ist, dass sich die Curve $y = f(x)$ um die x-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems drehte, liegt ein Viereck, begrenzt von zwei Parallelkreisen, deren Ebenen um x_0, bezüglich x_1, von der yz-Ebene abstehen und zwei Meridianen, welche mit dem Horizonte, d. i. mit der xy-Ebene, die Winkel w_0, bezüglich w_1, bilden. Die Coordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes dieses Vierecks sollen berechnet werden I. für den in der Aufgabe bezeichneten allgemeinen Fall, II. für den, dass der Horizont den Winkel $w_1 - w_0 = \gamma$ halbirt.

Lösung. Die Aufgabe 80 ist eine Erweiterung von Nr. 78, auf welche bezüglich der Behandlung verwiesen werden möge. Man gelangt zu den die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ bestimmenden Gleichungen

$$S = (w_1 - w_0) \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$S\xi = (w_1 - w_0) \int_{x_0}^{x_1} xy \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$S\eta = (\sin w_1 - \sin w_0) \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$S\zeta = (\cos w_0 - \cos w_1) \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \tan \tfrac{1}{2} (w_1 + w_0)\, S\eta.$$

Liegt der Horizont so, dass er den Winkel $w_1 - w_0 = \gamma$ halbirt, so lauten diese Gleichungen

$$S = \gamma \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$S\xi = \gamma \int_{x_0}^{x_1} xy \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$S\eta = 2 \sin \tfrac{1}{2} \gamma \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$\zeta = 0.$$

F. Bestimmung des Schwerpunktes beliebiger Flächen.

Aufgabe 81. In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Systems sind zwei Curven $N_0M_0N_1$ und $N_0M_1N_1$ (Fig. 11) gegeben, welche die Gleichungen $y_0 = f_0(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ haben. Sie werden von der Abscisse $OL_0 = x_0$ bis zur Abscisse $OL_1 = x_1$ gerechnet. Es sollen die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes von demjenigen Theile der homogenen Fläche $z = f(x, y)$ bestimmt werden, welcher senkrecht über dem Grundrisse $N_0M_0N_1M_1$ liegt.

Lösung. Bezeichnet man die Coordinaten OL, LP', $P'P$ eines beliebigen Flächenpunktes P mit x, y, z und den Inhalt des über $N_0M_0N_1M_1$ liegenden Flächentheils mit S, so hat man ξ, η und ζ durch die Gleichungen

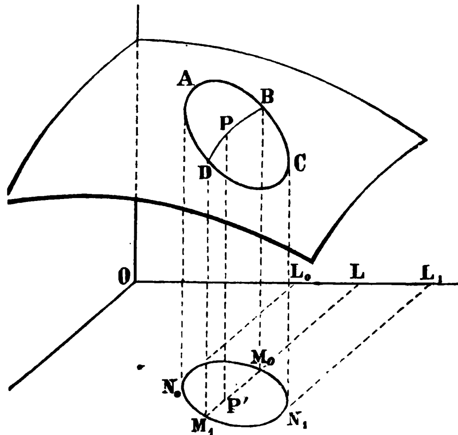
$$1)\quad S\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} Rx\,dx\,dy,$$

$$2)\quad S\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} Ry\,dx\,dy,$$

$$3)\quad S\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} Rz\,dx\,dy,$$

$$4)\quad S = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} R\,dx\,dy,$$

Fig. 11.



in denen zur Abkürzung

$$5)\qquad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = R$$

gesetzt ist. Es ergeben sich diese Gleichungen leicht aus Fig. 11, wenn man sich die Fläche in Elemente von zwei unendlich kleinen Dimensionen zerlegt denkt und beachtet, dass der Winkel ν zwischen Flächennormale und z-Achse durch

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

bekannt ist.

Aufgabe 82. Aus den Resultaten der vorhergehenden Aufgabe sollen die allgemeinen Formeln zur Bestimmung des Schwerpunktes von I. ebenen Flächen, II. Cylinderflächen hergeleitet werden; ferner III. die für den Schwerpunkt des Quadranten derjenigen Rotationsfläche, welche durch Drehung der Curve $y_1 = f(x)$, um die x-Achse, entsteht.

Lösung. I Nimmt man die Ebene der Fläche als xy-Ebene, so ist $z = 0$ und $R = 1$. Setzt man dies in die Gleichungen 1)

bis 4) der vorhergehenden Aufgabe ein und führt die Integration in Bezug auf y aus, so ergeben sich

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,(y_1 - y_0)\,dx,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\,dx,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,dx$$

als allgemeine Formeln für die Schwerpunktsbestimmung. Dies sind dieselben Resultate, wie in der Lösung der Aufgabe 64.

II. Liegt die Cylinderfläche parallel zur y-Achse, so ist z eine Function von x allein, nicht auch von y. In Folge dessen gehen die Gleichungen 1) bis 4) der Lösung der vorigen Aufgabe in

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,(y_1 - y_0)\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

$$S\zeta = \int_{x_0}^{x_1} z\,(y_1 - y_0)\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\sqrt{1 + z'^2}\,dx$$

über, was mit Nr. 72 übereinstimmt.

III. Da die Gleichung der vorgeschriebenen Umdrehungsfläche $y_1^2 = y^2 + z^2$ ist, so hat man

$$R = y_1 \sqrt{\frac{1 + y_1'^2}{y_1^2 - y^2}}.$$

Wird dies in die Gleichungen 1) bis 4) der Lösung der vorigen Aufgabe eingesetzt, so ergiebt sich

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} x y_1 \sqrt{\frac{1+y_1'^2}{y_1^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

$$S\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} y y_1 \sqrt{\frac{1+y_1'^2}{y_1^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

$$S\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} y_1 \sqrt{1+y_1'^2}\,dx\,dy,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} y_1 \sqrt{\frac{1+y_1'^2}{y_1^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

Beachtet man hier, dass y_1 und y_1' Functionen von x allein, nicht auch von y, sind, so ergeben sich aus diesen Gleichungen die einfacheren

$$S\xi = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} x y_1 \sqrt{1+y_1'^2}\,dx,$$

$$S\eta = S\zeta = \int_{x_0}^{x_1} y_1^2 \sqrt{1+y_1'^2}\,dx,$$

$$S = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} y_1 \sqrt{1+y_1'^2}\,dx,$$

welche mit den unter Nr. 75 gefundenen übereinstimmen, wenn man z statt y_1 schreibt.

Aufgabe 83. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist ein Kugeloctant (oder auch ein Kuppelgewölbe) gegeben, dessen Radius a ist und dessen Kugelmittelpunkt mit dem Anfange der Coordinaten zusammenfällt. In der xy-Ebene befindet sich ein Halbkreis über der x-Achse, welcher den Halbmesser $\frac{1}{2}a$ hat und von der y-Achse berührt wird. Man soll nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 81 die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ desjenigen Theiles der Kugelfläche (oder der Oberfläche des Kuppelgewölbes) berechnen, der vertical über dem genannten Halbkreise liegt.

Lösung. Die gesuchten Coordinaten ξ, η und ζ sind hier durch die Gleichungen

$$S\xi = \int_0^a \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} x R\, dx\, dy,$$

$$S\eta = \int_0^a \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} y R\, dx\, dy,$$

$$S\zeta = \int_0^a \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} z R\, dx\, dy,$$

$$S = \int_0^a \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} R\, dx\, dy,$$

bestimmt, in denen R dieselbe Bedeutung hat, wie bei der Lösung der Aufgabe 81.

Da nun $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, also

$$R = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

ist, so hat man

$$S = a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Hieraus folgt, nach Ausführung der Integrationen,

1) $$S = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a^2$$

(also der hübsche Satz, dass der Kugeloctant vermindert um die in Betracht gezogene Fläche dem Quadrate des Kugelradius gleich ist).

Ferner hat man

$$S\,\xi = a \int_0^a \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{x\, dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Kehrt man hier die Integrationsordnung um, so geht diese Gleichung über in

$$S\xi = a\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-y^2}}^{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-y^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}},$$

woraus sich schliesslich

2) $$S\xi = \tfrac{1}{3}a^3$$

ergiebt. Zu demselben Resultate kann man auch dadurch leicht kommen, dass man $S\xi$ zunächst durch Polarcoordinaten, r und θ, ausdrückt, dann aber unter Verwendung der naheliegenden Substitution $r = a\cos\varphi$ integrirt.

Eben so ist

$$S\eta = a\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

und hieraus folgt

3) $$S\eta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)a^3 = \frac{3\pi - 8}{12}a^3.$$

Endlich

$$S\zeta = a\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} dy,$$

das ist

4) $$S\zeta = \tfrac{1}{8}\pi a^3.$$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) ergeben sich nun die gesuchten Schwerpunktscoordinaten zu

$$\xi = \frac{2}{3(\pi-2)}a, \quad \eta = \frac{3\pi-8}{6(\pi-2)}a, \quad \zeta = \frac{\pi}{4(\pi-2)}a.$$

Aufgabe 84. In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist ein Ellipsenquadrant aus den Halbachsen a und b so construirt, dass die letzteren mit der x- bezüglich y-Achse zusammenfallen. Ueber demselben steht ein elliptisches Paraboloid, dessen Gleichung

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

ist. Man sucht die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ von demjenigen Theile dieser Fläche, welcher über jenem Ellipsenquadranten liegt.

Lösung. In den allgemeinen Gleichungen 1) bis 4) der Lösung der Aufgabe 81, welche zur Schwerpunktsbestimmung der allgemeinen Fläche $z = f(x, y)$ dienen, ist hier

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

also

$$R = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}};$$

dieselben lauten daher

$$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

$$S\xi = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

$$S\eta = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

$$S\zeta = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} z \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$

Schafft man in der ersten dieser vier Gleichungen die elliptischen Grenzen mittelst der Substitutionen

$$x = a\varrho \cos\theta, \quad y = b\varrho \sin\theta$$

weg, so ergiebt sich sehr leicht

$$S = \tfrac{1}{6}\pi ab (2\sqrt{2} - 1).$$

Unter Benutzung derselben Substitutionen liefert die zweite Gleichung

$$S\xi = a^2 b \int_0^1 \varrho^2 \sqrt{1 + \varrho^2}\, d\varrho;$$

dies giebt, bei Anwendung einer bekannten Reductionsformel,

$$S\xi = \tfrac{1}{8}a^2 b\,[3\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})].$$

Auf dieselbe Weise folgt aus der dritten der obigen vier Gleichungen

$$S\eta = a b^2 \int_0^1 \varrho^2 \sqrt{1+\varrho^2}\, d\varrho,$$

das ist soviel wie

$$S\eta = \frac{b}{a} S\xi,$$

mithin

$$S\eta = \tfrac{1}{8} a b^2 [3\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})].$$

Endlich erhält man aus der vierten der genannten Gleichungen

$$S\zeta = \tfrac{1}{60}(1+\sqrt{2})\,\pi a b\,(a+b).$$

Daher sind

$$\xi = \frac{3a\,[3\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})]}{4\pi(2\sqrt{2}-1)},$$

$$\eta = \frac{3b\,[3\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})]}{4\pi(2\sqrt{2}-1)},$$

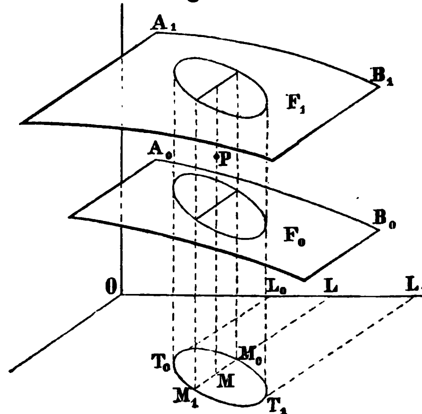
$$\zeta = \frac{(a+b)(1+\sqrt{2})}{10(2\sqrt{2}-1)}$$

die verlangten Schwerpunktscoordinaten.

G. Bestimmung des Schwerpunktes cylindrisch begrenzter Körper.

Aufgabe 85. Ueber den Curven A_0B_0 und A_1B_1 (Fig. 12), welche die Gleichungen $z_0 = \varphi_0(x)$ und $z_1 = \varphi_1(x)$ haben, liegen zwei Cylinderflächen F_0 und F_1 parallel zur y-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems. In der xy-Ebene sind zwei Linien $T_0M_0T_1$ und $T_0M_1T_1$ gezeichnet, welche von der Abscisse x_0 bis zur Abscisse x_1 gerechnet werden und die Gleichungen

Fig. 12.



$$y_0 = f_0(x), \quad y_1 = f_1(x)$$

haben. Ueber denselben stehen Cylinderflächen parallel zur z-Achse. Man sucht die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ für denjenigen homogenen Körper, welcher von den genannten vier Flächen begrenzt wird.

Lösung. Denkt man sich den Körper in stabförmige Elemente, parallel zur z-Achse zerlegt, bezeichnet sein Volumen mit V und die Coordinaten des allgemeinen Punktes desselben mit x, y, z, so hat man zur Bestimmung der gesuchten Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ die Gleichungen

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} x(z_1 - z_0)\,dx\,dy,$$

$$V\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y(z_1 - z_0)\,dx\,dy,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1^2 - z_0^2)\,dx\,dy,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\,dx\,dy.$$

Da nun z_1 und z_0 nicht von y, sondern nur von x abhängen, so lässt sich die Integration in Bezug auf y ausführen. Die Formeln lauten also einfacher

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1} x(y_1 - y_0)(z_1 - z_0)\,dx,$$

$$V\eta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)(z_1 - z_0)\,dx,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)(z_1^2 - z_0^2)\,dx,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)(z_1 - z_0)\,dx;$$

zu denselben gelangt man noch schneller, wenn man von vorn herein den Körper in Schichten parallel zur yz-Ebene, statt in stabförmige Elemente, zerlegt.

Aufgabe 86. Von dem Klostergewölbe $CADO$ (Fig. 9 auf Seite 56), dessen Wölblinie CNA eine gemeine Parabel ist, deren Scheitel in C liegt, sind die Dimensionen $OA = a$, $AD = OB = b$, $OC = h$ und der Parabelhalbparameter p gegeben (welcher letztere mit a und h durch die Gleichung $a^2 = 2ph$ zusammenhängt). Man verlangt die Coordinaten ξ, η und ζ des Gewölbkörpers $CADO$.

Lösung. Werden die Coordinaten OL, LM und MP eines beliebigen Punktes P der Wölblinie CPD mit x, y_1 und z_1 bezeichnet, so sind ξ, η und ζ durch die Gleichungen

$$V\xi = \int_0^a x y_1 z_1 \, dx, \quad V\eta = \tfrac{1}{2}\int_0^a {y_1}^2 z_1 \, dx, \quad V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_0^a y_1 {z_1}^2 \, dx,$$

$$V = \int_0^a y_1 z_1 \, dx$$

bestimmt.

Hierbei ist $y_1 = \frac{b}{a}x$, $z_1 = h - \frac{x^2}{2p}$. Daher ergiebt sich, bei Einsetzung dieser Werthe, sehr leicht

$$V = \tfrac{1}{8}\frac{a^3 b}{p},$$

oder, wenn h benutzt wird,

$$V = \tfrac{1}{4} a b h.$$

Ferner hat man

$$V\xi = \frac{b}{a}\int_0^a x^2 \left(h - \frac{x^2}{2p}\right) dx$$

und daraus

$$V\xi = \tfrac{1}{15}\frac{a^4 b}{p},$$

oder, wenn man wieder h einführt,

$$V\xi = \tfrac{2}{15} a^2 b h.$$

Auf dieselbe Weise folgt

$$V\eta = \tfrac{1}{30}\frac{a^3 b^2}{p} = \tfrac{1}{15} a b^2 h;$$

endlich

$$V\zeta = \tfrac{1}{48}\frac{a^5 b}{p^2} = \tfrac{1}{12} a b h^2.$$

Die verlangten Schwerpunktscoordinaten sind mithin

$$\xi = \tfrac{8}{15} a, \quad \eta = \tfrac{4}{15} b, \quad \zeta = \tfrac{1}{3} h.$$

Aufgabe 87. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ des homogenen Gewölbkörpers $CADO = V$ (Fig. 9 auf Seite 56) berechnet werden, dessen Wölblinie CNA eine gemeine Kettenlinie ist, deren Scheitel in C liegt und deren Parameter k man kennt. Gegeben sind, ausser k, die Dimensionen $OA = a$, $AD = OB = b$, $OC = h$, also auch $h + k$, welches c heissen möge.

Lösung. Bezeichnet man die Länge des Bogens CA, welche sich bekanntlich sehr leicht construiren lässt (vergl. Lösung der Aufgabe 55) mit s und beachtet, dass

$$\frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}\right) = s \text{ und } \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}\right) = c$$

ist, so findet man

$$V = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{2}a^2 c - k(as - hk)\right\},$$

$$V\xi = \frac{b}{3a}\left\{a^2(ac - 3ks) + 6k^2(ac - ks)\right\},$$

$$V\eta = \frac{b}{2a} V\xi,$$

$$V\zeta = \frac{b}{8a}\left\{a^2(2c^2 + k^2) + k^2(7c^2 + k^2) - 2ck(3as + 4k^2)\right\}.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ sogleich durch Division.

Aufgabe 88. Ein gerades Prisma von der Höhe b hat ein rechtwinkliges Dreieck zur Basis, dessen Katheten a und c sind. Die Dichtigkeit des Körpers wächst proportional dem Abstande von derjenigen Seitenfläche, welche von den Kanten b und c gebildet wird und hat im Abstande 1 von derselben den Werth k. Es sollen die Coordinaten des Schwerpunktes des Prima's berechnet werden.

Lösung. Legt man das Coordinatensystem so, dass die Kante a mit der x-Achse, die Kante b mit der y-Achse, c mit der z-Achse

zusammenfällt und bezeichnet mit G das Gewicht des Körpers, mit ξ, η und ζ, wie gewöhnlich, die Schwerpunktscoordinaten, so hat man zur Bestimmung von ξ die Gleichungen

$$G\xi = \frac{kbc}{a}\int_0^a x^2(a-x)\,dx,$$

$$G = \frac{kbc}{a}\int_0^a x(a-x)\,dx.$$

Aus denselben folgt

$$G\xi = \tfrac{1}{12}ka^3bc,$$
$$G = \tfrac{1}{6}ka^2bc,$$

mithin

$$\xi = \tfrac{1}{2}a.$$

Ferner, ohne Rechnung,

$$\eta = \tfrac{1}{2}b.$$

Endlich erhält man ζ aus der Gleichung

$$G\zeta = \frac{kbc^2}{2a^2}\int_0^a (a-x)^2 x\,dx.$$

Dieselbe liefert

$$G\zeta = \tfrac{1}{24}ka^2bc^2;$$

daher ist

$$\zeta = \tfrac{1}{4}c$$

das z des Schwerpunktes.

Aufgabe 89. Ein gerader Kreiscylinder, welcher die Achsenlänge a und den Grundflächenradius b hat, ändert seine Dichtigkeit nach Schichten parallel zur Deckfläche derartig, dass das Gewicht der Volumeneinheit immer aus einem constanten Theile k und aus einem veränderlichen besteht, der dem Abstande von der Deckfläche proportional ist, für die Einheit dieses Abstandes aber den Werth n besitzt. Man soll die Lage des Schwerpunktes dieses Cylinders berechnen.

Lösung. Für das Cylindergewicht findet man leicht

$$P = \tfrac{1}{2}(2k + na)\pi ab^2;$$

dasselbe ist mithin gleich demjenigen Gewichte, welches der Körper haben würde, wenn er durchweg die in seiner halben Höhe herrschende Dichtigkeit besässe.

Das bezüglich der Cylinderdeckfläche genommene statische Moment dieses Gewichtes hat den Werth

$$P\zeta = \tfrac{1}{6}(3k + 2na)\pi a^2 b^2.$$

Daher liegt der Schwerpunkt in dem Abstande

$$\zeta = \frac{3k + 2na}{3(2k + na)} a$$

von der Deckfläche (und selbstverständlich auf der Achse).

Wenn n verglichen mit k sehr klein ist, so besitzt ζ nahezu den Werth $\tfrac{1}{2}a$; ist hingegen n verglichen mit k sehr gross, so hat ζ den Näherungswerth $\tfrac{2}{3}a$.

H. Bestimmung des Schwerpunktes von Umdrehungskörpern.

Aufgabe 90. Die Curve BC (Fig. 10 auf Seite 59), deren Gleichung $y_1 = f(x)$ gegeben ist und welche von der Abscisse $OL_0 = a_0$ bis zur Abscisse $OL_1 = a_1$ gerechnet wird, erzeugt einen Rotationsflächenquadranten $BEFC$, indem sie sich um die x-Achse dreht. Welches sind die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes des Umdrehungskörpers BEL_0CFL_1?

Lösung. Denkt man sich das Volumen V in stabförmige Elemente, parallel zur z-Achse, zerlegt, und bezeichnet die Coordinaten des allgemeinen Oberflächenpunktes P mit x, y, z, so hat man ξ, η und ζ zunächst durch die Gleichungen

$$V\xi = \int_{a_0}^{a_1}\int_0^{y_1} x\sqrt{y_1^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

$$V\eta = V\zeta = \int_{a_0}^{a_1}\int_0^{y_1} y\sqrt{y_1^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

$$V = \int_{a_0}^{a_1}\int_0^{y_1} \sqrt{y_1^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Dieselben gehen, da sich die Integration in Bezug auf y ausführen lässt, über in

$$V\xi = \frac{\pi}{4}\int_{a_0}^{a_1} x y_1^2\, dx,$$

$$V\eta = V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_{a_0}^{a_1} y_1^3\, dx,$$

$$V = \frac{\pi}{4}\int_{a_0}^{a_1} y_1^2\, dx.$$

Hieraus folgen ξ, η und ζ durch Division.

Aufgabe 91. Es soll, unter Anwendung rechtwinkliger Coordinaten (wie bei Nr. 90), die Lage des Schwerpunktes von dem Volumen eines Kugeloctanten, dessen Radius a ist, berechnet werden.

Lösung. Wird der Kugelmittelpunkt als Coordinatenanfang genommen und das Volumen des Octanten mit V bezeichnet, so sind die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ durch die Gleichungen

$$V\xi = \frac{\pi}{4}\int_0^a x\,(a^2 - x^2)\, dx,$$

$$V\eta = V\zeta = \tfrac{1}{3}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}^{\,3}\, dx$$

bestimmt, in welchen bekanntlich

$$V = \frac{\pi}{6}\, a^3$$

ist. Aus der ersten dieser Formeln ergiebt sich sogleich

$$V\xi = \frac{\pi}{16}\, a^4;$$

die zweite derselben liefert, unter Benutzung bekannter Reductionsformeln,

$$V\eta = V\zeta = \frac{\pi}{16}\, a^4.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind daher

$$\xi = \eta = \zeta = \tfrac{3}{8}\, a.$$

Aufgabe 92. Ein homogener Körper ist aus einer Halbkugel und einem geraden Kreiskegel so zusammengesetzt, dass die Basis der Halbkugel in der ihr congruenten des Kegels liegt. Der Kugelradius ist c, die Kegelhöhe a. Man soll I. berechnen, wo der Schwerpunkt dieses Körpers liegt, II. wie sich Kegelhöhe und Kugelradius verhalten müssen, wenn immer Gleichgewicht stattfinden soll, mit welchem Punkte der Halbkugelfläche man den Körper auch auf eine horizontale Ebene aufsetzen mag.

Lösung. I. Der Schwerpunkt liegt natürlich auf der Symmetrieachse. Nimmt man diese als x-Achse und den Mittelpunkt der Kegelbasis als Coordinatenanfang, so enthält die Momentegleichung

$$\tfrac{1}{3}\pi c^2 (a+2c)\,\xi = \frac{\pi c^2}{a^2}\int\limits_0^a (a-x)^2 x\,dx - \pi\int\limits_0^c (c^2-x^2)\,x\,dx$$

die Bestimmung des Schwerpunktsabstandes ξ von der Kegelgrundfläche.

Dieselbe liefert

$$\xi = \frac{a^2-3c^2}{4(a+2c)},$$

was sowohl positiv, als auch negativ, sein kann.

II. Soll der Körper immer im Gleichgewichte sein, mit welchem Punkte der Kugeloberfläche man ihn auch aufsetzen mag, so muss sein Schwerpunkt offenbar mit dem Kugelmittelpunkte zusammenfallen; es muss also

$$a = c\sqrt{3}$$

sein, der Winkel, welchen die Kegelseite mit der Kegelbasis bildet, daher 60 Grad.

Aufgabe 93. Es soll der Schwerpunkt desjenigen Körpers bestimmt werden, dessen Mantelfläche entsteht, wenn sich die Kettenlinie DF (Fig. 10 auf Seite 59), deren Gleichung

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

ist, ein volles Mal um die x-Achse dreht.

Lösung. Da der gesuchte Punkt auf der x-Achse liegt, so braucht nur sein ξ berechnet zu werden.

Für dasselbe hat man

$$V\xi = \frac{\pi}{4} k^2 \int_0^x x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx$$

und

$$V = \frac{\pi}{4} k^2 \int_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx.$$

Hieraus folgt, wenn man mit s die Länge desjenigen Kettenlinienbogens bezeichnet, welcher zu der Ordinate z gehört,

$$V\xi = \tfrac{1}{4}\pi k [2sxz + k(x^2 - s^2)],$$
$$V = \tfrac{1}{2}\pi k (sz + kx).$$

Der Schwerpunktsabstand ist mithin

$$\xi = \frac{2sxz + k[x^2 - s^2]}{2(sz + kx)}.$$

(Vergl. Aufgabe 76 und deren Lösung.)

Aufgabe 94. Wie Nr. 93, nur dreht sich die Kettenlinie um die z-Achse, statt um die x-Achse.

Lösung. Hier ist blos der Abstand ζ des Schwerpunktes von der xy-Ebene zu berechnen. Dazu hat man

$$V\zeta = \tfrac{1}{4}\pi k \int_0^x x^2 \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) dx.$$

Dies liefert

$$V\zeta = \tfrac{1}{4}\pi [x^2(2z^2 - k^2) - ks(2xz - ks)].$$

Ferner findet man leicht

$$V = \pi \{x^2 z - 2k[sx - k(z-k)]\};$$

also ist

$$\zeta = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{x^2(2z^2 - k^2) - ks(2xz - ks)}{x^2 z - 2k[sx - k(z-k)]}.$$

J. Bestimmung des Schwerpunktes beliebiger Körper.

α) Parallelcoordinaten.

Aufgabe 95. Ueber den Curven $T_0 M_0 T_1$ und $T_0 M_1 T_1$ (Fig. 12 auf Seite 71), welche die Gleichungen

$$y_0 = \varphi_0(x) \text{ und } y_1 = \varphi_1(x)$$

haben und von der Abscisse $OL_0 = x_0$ bis zu der Abscisse $OL_1 = x_1$ gerechnet werden, stehen Cylinderflächen parallel zur z-Achse. Dieselben werden von zwei Flächen F_0 und F_1 durchschnitten, deren Gleichungen

$$z_0 = f_0(x,y), \text{ bezüglich } z_1 = f_1(x,y),$$

sind. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ desjenigen Körpers ermittelt werden, welcher über dem Grundrisse $T_0 M_0 T_1 M_1$ liegt, von den Flächen F_0 und F_1 aber oben und unten begrenzt wird. Das Gewicht p der Volumeneinheit des Körpers soll I. als veränderlich, II. als constant vorausgesetzt werden.

Lösung. I. Wird das Gewicht des Körpers mit P bezeichnet, so sind ξ, η und ζ durch die vier Gleichungen

$$P\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\,x\,dx\,dy\,dz,$$

$$P\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\,y\,dx\,dy\,dz,$$

$$P\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\,z\,dx\,dy\,dz,$$

$$P = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\,dx\,dy\,dz$$

bestimmt.

II. Ist p constant, so gehen diese Gleichungen in

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$V\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} y\,dx\,dy\,dz,$$

$$V\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} z\,dx\,dy\,dz,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} dx\,dy\,dz$$

über, in denen V selbstverständlich das Volumen des Körpers bedeutet. Hier ist die Integration in Bezug auf z ausführbar; die Gleichungen lauten daher einfacher

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} x\,(z_1 - z_0)\,dx\,dy,$$

$$V\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y\,(z_1 - z_0)\,dx\,dy,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} ({z_1}^2 - {z_0}^2)\,dx\,dy,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_0}\int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\,dx\,dy.$$

Zu dieser letzten Gruppe von Formeln gelangt man schneller, wenn man sich den homogenen Körper von vorn herein in stabförmige Elemente zerlegt denkt.

Aufgabe 96. Aus den vier letzten Gleichungen der Lösung der vorigen Aufgabe sollen die allgemeinen Formeln der Schwerpunktsbestimmung für den Fall hergeleitet werden, dass F_0 und F_1 Cylinderflächen sind, welche parallel zur y-Achse liegen.

Lösung. Unter Beachtung des Umstandes, dass z_0 und z_1 in dem vorgeschriebenen Falle nur noch Functionen von x, nicht mehr solche von y, sind, ergeben sich sofort die vier Gleichungen, welche den Schluss der Lösung der Aufgabe 85 bilden.

Aufgabe 97. Ein schiefabgeschnittenes, gerades, vierseitiges Prisma hat als Grundfläche ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten $AB = a$ und $AD = b$ sind. Die drei Seitenkanten, welche in A, B und C senkrecht zur Grundfläche stehen, haben die Längen c, c_1, c_2; die vierte, durch dieselben bestimmte, ist gleich c_3. Man sucht die Lage des Schwerpunktes des Körpers.

Lösung. Legt man das Coordinatensystem so, dass AB die x-Achse, AD die y-Achse und c die z-Achse ist, und bezeichnet mit V das Volumen des schiefabgeschnittenen Prisma's, mit x, y,

z die Coordinaten des allgemeinen Punktes seiner Deckfläche, so hat man die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ durch die Gleichungen

$$V\xi = \int_0^a\int_0^b xz\,dx\,dy, \qquad V\eta = \int_0^a\int_0^b yz\,dx\,dy,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_0^a\int_0^b z^2\,dx\,dy, \qquad V = \int_0^a\int_0^b z\,dx\,dy.$$

In denselben ist

$$z = c - \frac{c-c_1}{a}x - \frac{c-c_3}{b}y = c - \frac{c-c_1}{a}x - \frac{c_1-c_2}{b}y.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes und Ausführung der Integrationen ergiebt sich

$$V\xi = \tfrac{1}{12}a^2b\,(3c_3 + 4c_1 - c) = \tfrac{1}{12}a^2b\,(3c_2 + c_1 + 2c),$$

$$V\eta = \tfrac{1}{12}ab^2\,(4c_3 + 3c_1 - c) = \tfrac{1}{12}ab^2\,(4c_2 - c_1 + 3c),$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{12}ab\,(2c_3^2 + 2c_1^2 + c^2 + 3c_3c_1 - c_3c - c_1c)$$

$$= \tfrac{1}{12}ab\,(2c_2^2 + c_1^2 + 2c^2 + 3c_2c - c_2c_1 - c_1c),$$

$$V = \tfrac{1}{2}ab\,(c_3 + c_1) = \tfrac{1}{2}ab\,(c_2 + c).$$

Die gesuchten Schwerpunktscoordinaten sind mithin

$$\xi = \tfrac{1}{6}a\,\frac{3c_3 + 4c_1 - c}{c_3 + c_1} = \tfrac{1}{6}a\,\frac{3c_2 + c_1 + 2c}{c_2 + c},$$

$$\eta = \tfrac{1}{6}b\,\frac{4c_3 + 3c_1 - c}{c_3 + c_1} = \tfrac{1}{6}b\,\frac{4c_2 - c_1 + 3c}{c_2 + c},$$

$$\zeta = \tfrac{1}{6}\,\frac{2c_3^2 + 2c_1^2 + c^2 + 3c_3c_1 - c_3c - c_1c}{c_3 + c_1}$$

$$= \tfrac{1}{6}\,\frac{2c_2^2 + c_1^2 + 2c^2 + 3c_2c - c_2c_1 - c_1c}{c_2 + c}.$$

Wenn die Seitenkanten gleich lang werden, so wird hieraus

$$\xi = \tfrac{1}{2}a, \quad \eta = \tfrac{1}{2}b, \quad \zeta = \tfrac{1}{2}c,$$

was als Bestätigung dient.

Aufgabe 98. In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist ein Rechteck $OACB$ gezeichnet, dessen Seite $OA = a$ mit der x-Achse und dessen Seite $OB = b$ mit der y-Achse zusammenfällt. Ueber demselben steht das elliptische Paraboloid

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z.$$

Es sollen die Coordinaten des Schwerpunktes desjenigen prismatischen Körpers ermittelt werden, welcher senkrecht (parallel zur z-Achse) über dem Rechtecke $OACB$ steht, oben aber von der Paraboloidfläche begrenzt wird, und zwar I. für den Fall, dass a, b, p und q verschieden sind, II. für den speciellen Fall $b=a$ und $q=p$.

Lösung. I. Hier ist

$$V\xi=\int_0^a\int_0^b x\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\,dy,$$

$$V\eta=\int_0^a\int_0^b y\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\,dy,$$

$$V\zeta=\tfrac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)^2 dx\,dy,$$

$$V=\int_0^a\int_0^b \left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\,dy.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich sehr leicht

$$V\xi=\tfrac{1}{24}\,\frac{ab\,(3a^3q+2ab^2p)}{pq},\quad V\eta=\tfrac{1}{24}\,\frac{ab\,(2a^2bq+3b^3p)}{pq},$$

$$V\zeta=\tfrac{1}{360}\,\frac{ab\,(9a^4q^2+10a^2b^2pq+9b^4p^2)}{p^2q^2},$$

$$V=\tfrac{1}{6}\,\frac{ab\,(a^2q+b^2p)}{pq}.$$

Die zu ermittelnden Schwerpunktscoordinaten sind mithin

$$\xi=\frac{a}{4}\cdot\frac{3a^2q+2b^2p}{a^2q+b^2p},\quad \eta=\frac{b}{4}\cdot\frac{2a^2q+3b^2p}{a^2q+b^2p},$$

$$\zeta=\frac{1}{60pq}\cdot\frac{9a^4q^2+10a^2b^2pq+9b^4p^2}{a^2q+b^2p},$$

in welchen Ausdrücken statt a^2q+b^2p auch $2cpq$ gesetzt werden kann, wenn man unter c dasjenige z der Paraboloidfläche versteht, das zu $x=a$ und $y=b$ gehört, also über dem Punkte C steht.

II. Für $b=a$ und $q=p$ sind die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\xi = \eta = \tfrac{5}{8}a, \quad \zeta = \tfrac{7}{30}\frac{a^2}{p},$$

was leicht construirt werden kann.

Aufgabe 99. Eine gerade Pyramide von der Höhe a hat als Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $a\sqrt{2}$. Die Dichtigkeit derselben ist proportional dem Quadrate des Abstandes von dem Mittelpunkte dieser Grundfläche; in der Entfernung 1 von diesem ist das Gewicht der Volumeneinheit $= k$. Man sucht die Lage des Schwerpunktes.

Lösung. Jedenfalls liegt der Schwerpunkt auf der Mittellinie der Pyramide. Nimmt man also die eine Basisdiagonale als x-Achse, die andere als y-Achse, so dass die Mittellinie zur z-Achse wird, so handelt es sich nur noch um die Bestimmung des z des Schwerpunktes. Dasselbe möge, wie gewöhnlich, ζ heissen. Wird mit P das Gewicht des vierten Theiles der Pyramide bezeichnet, so ist jenes ζ durch die beiden Gleichungen

$$P\zeta = k\int_0^a\int_0^{a-x}\int_0^{a-x-y}(x^2+y^2+z^2)\,z\,dx\,dy\,dz,$$

$$P = k\int_0^a\int_0^{a-x}\int_0^{a-x-y}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

bestimmt; die erste derselben liefert

$$P\zeta = \tfrac{1}{72}ka^6;$$

die zweite

$$P = \tfrac{1}{20}ka^5,$$

was nach Aufgabe 9 bereits bekannt ist. Der Schwerpunkt liegt also in der Höhe

$$\zeta = \tfrac{5}{18}a.$$

β) Polarcoordinaten.

Aufgabe 100. Es sollen, mit Benutzung der unter Aufgabe 95 gefundenen Resultate, die allgemeinen Formeln für die Schwerpunktsbestimmung solcher Körper hergeleitet werden, welche auf Polarcoordinaten bezogen sind, und zwar I. für den Fall veränderlicher, II. für den constanter Dichtigkeit.

Lösung. I. Bezeichnet man mit r den Radiusvector des allgemeinen Punktes P des Körpers, welchem die rechtwinkligen Coordinaten x, y und z zukommen, mit ψ den Winkel zwischen Leitstrahl und x-Achse, mit ω denjenigen, unter welchem die durch r und die x-Achse gelegte Ebene gegen die xy-Ebene geneigt ist, so gelten bekanntlich die Beziehungen

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi\cos\omega, \quad z = r\sin\psi\sin\omega,$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\sin\psi\,d\psi\,d\omega\,dr.$$

In Folge dessen lauten die allgemeinen Gleichungen zur Schwerpunktsbestimmung (nach Lösung der Aufgabe 95, I)

$$P\xi = \int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p\,r^3\cos\psi\sin\psi\,d\omega\,d\psi\,dr$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p\,r^3\sin 2\psi\,d\omega\,d\psi\,dr,$$
$$P\eta = \int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p\,r^3\sin^2\psi\cos\omega\,d\omega\,d\psi\,dr,$$
$$P\zeta = \int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p\,r^3\sin^2\psi\sin\omega\,d\omega\,d\psi\,dr,$$
$$P = \int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p\,r^2\sin\psi\,d\omega\,d\psi\,dr;$$

in denselben haben P und p dieselbe Bedeutung, wie unter Nr. 95; die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Natur der Körperbegrenzungen.

II. Wenn p constant ist, sind die Gleichungen einfacher

$$V\xi = \tfrac{1}{4}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4)\cos\psi\sin\psi\,d\omega\,d\psi$$
$$= \tfrac{1}{8}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4)\sin 2\psi\,d\omega\,d\psi,$$

$$V\eta = \frac{1}{4}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}(r_1^4 - r_0^4)\sin^2\psi\cos\omega\,d\omega\,d\psi,$$

$$V\zeta = \frac{1}{4}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}(r_1^4 - r_0^4)\sin^2\psi\sin\omega\,d\omega\,d\psi,$$

$$V = \frac{1}{3}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}(r_1^3 - r_0^3)\sin\psi\,d\omega\,d\psi.$$

Aufgabe 101. Ein homogener Kugelsector hat den Radius a und den Centriwinkel 2γ. Man soll (unter Anwendung von Polarcoordinaten) die Lage seines Schwerpunktes ermitteln.

Lösung. Der gesuchte Schwerpunkt liegt auf der Mittellinie des Sectors. Nimmt man diese als x-Achse und den Kugelmittelpunkt als Pol, so ist das ξ des Schwerpunktes durch die beiden Gleichungen

$$V\xi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\gamma} a^4 \sin\psi\cos\psi\,d\omega\,d\psi,$$

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\gamma} a^3 \sin\psi\,d\omega\,d\psi$$

bestimmt; aus diesen folgt

$$V\xi = \frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\gamma,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \sin^2\frac{\gamma}{2};$$

mithin ist

$$\zeta = \frac{3}{4}a\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Für die Halbkugel z. B. hat man

$$\xi = \frac{3}{8}a.$$

Aufgabe 102. Die beiden Meridianebenen eines homogenen halben Kugelkeiles schliessen den Flächenwinkel γ ein. Der Kugelradius ist gleich a. Es wird die Lage des Schwerpunktes gesucht.

Lösung. Nimmt man die eine Meridianebene als xz-Ebene, die mit der anderen gebildete Durchschnittsgerade als x-Achse, die Aequatorebene als yz-Ebene, so hat man die Bestimmung der Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ durch die vier Gleichungen

$$V\xi = \tfrac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos\psi \sin\psi \, d\omega \, d\psi,$$

$$V\eta = \tfrac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2\psi \cos\omega \, d\omega \, d\psi,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2\psi \sin\omega \, d\omega \, d\psi,$$

$$V = \tfrac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin\psi \, d\omega \, d\psi.$$

Diese liefern

$$V\xi = \tfrac{1}{8}a^4\gamma, \quad V\eta = \frac{\pi}{16}a^4(1-\cos\gamma) = \frac{\pi}{8}a^4\sin^2\frac{\gamma}{2}, \quad V\zeta = \frac{\pi}{16}a^4\sin\gamma,$$

$$V = \tfrac{1}{3}a^3\gamma,$$

welches Letztere auch aus der elementaren Geometrie bekannt ist. Man hat daher

$$\xi = \tfrac{3}{8}a, \quad \eta = \tfrac{3}{8}\pi\frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\gamma}a, \quad \zeta = \frac{3}{16}\pi\frac{\sin\gamma}{\gamma}a.$$

Für den Kugeloctanten z. B. giebt dies

$$\xi = \eta = \zeta = \tfrac{3}{8}a,$$

was mit der Lösung der Aufgabe 91 übereinstimmt.

Capitel IV.

Aufgaben über das Gleichgewicht von beliebigen Kräften an einem Systeme von Punkten.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Beliebig viele, an einem unveränderlichen Punktesysteme beliebig wirkende Kräfte P_1, P_2, P_3,..... sind im Gleichgewichte, wenn sie dasselbe weder zu verschieben, noch zu drehen vermögen. Bezieht man das Punktesystem auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, giebt jeden Punkt desselben durch sein x, y, z und zerlegt jede der Kräfte in Componenten X, Y, Z im Sinne der Achsen, so sind die soeben genannten Gleichgewichtsbedingungen bekanntlich durch die Gleichungen

1) $$\Sigma(X) = 0,$$
2) $$\Sigma(Y) = 0,$$
3) $$\Sigma(Z) = 0,$$
4) $$\Sigma(yZ - zY) = 0,$$
5) $$\Sigma(zX - xZ) = 0,$$
6) $$\Sigma(xY - yX) = 0$$

ausgedrückt. Dieselben sagen nämlich aus, dass weder eine Verschiebung längs einer der drei Achsen, noch eine Drehung um eine derselben stattfinden kann.

Diese sechs „Gleichungen des Gleichgewichts" (oder der Sinn derselben) bieten die Unterlagen zur Lösung der Aufgaben des vierten Capitels.

Ist das System, dessen Gleichgewicht untersucht werden soll, nicht vollkommen frei, so ist eine oder es sind mehrere der Gleichungen 1) bis 6) von selbst erfüllt. Kann z. B. keine Drehung stattfinden, so braucht nur den Gleichungen 1) bis 3) genügt zu werden, weil 4) bis 6) gar nicht mehr in Betracht kommen.

A. Aufgaben über die Standfähigkeit der Körper und Aehnliches.

Aufgabe 103. Eine gerade Pyramide von der Höhe h hat ein Quadrat als Basis, dessen Seite ebenfalls gleich h ist. Ihre Dichtigkeit ist proportional dem Quadrate des Abstandes vom Basismittelpunkte; im Abstande 1 von demselben ist das Gewicht der Volumeneinheit gleich k. Die Pyramide steht auf einer horizontalen Ebene. An ihrer Spitze greift eine Kraft P an; sie wirkt in einer Verticalebene, die senkrecht auf der einen Basiskante steht, unter einem spitzen Winkel $90^0 - \alpha$ gegen die Pyramidenhöhe und zwar nach unten. Ein Fortschieben, oder Eindrücken, wird als unmöglich vorausgesetzt. Welche Grösse muss die Kraft P haben, wenn ihrem Bestreben, die Pyramide umzukanten, durch die Schwere der letzteren das Gleichgewicht gehalten werden soll? Welchen Werth muss sie haben, wenn sie parallel zum Horizonte wirkend gedacht wird?

Lösung. Man findet als Bedingung für das Gleichgewicht sehr leicht die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(2\cos\alpha - \sin\alpha)P = \tfrac{1}{2}G,$$

in welcher G das Pyramidengewicht bedeutet. Dasselbe ist, entweder nach Lösung der Aufgabe 9, oder direct berechnet (in welchem letzteren Falle man am besten $\frac{1}{8}G$ bestimmt, weil sich dabei die Integrationsgrenzen zur sehr einfachen machen lassen)

$$G = \tfrac{1}{15}kh^5.$$

Mithin hat man

$$P = \tfrac{1}{15}\frac{k}{2\cos\alpha - \sin\alpha}h^5$$

als Grösse der gesuchten Kraft.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man P in zwei Componenten U und V zerlegt, von denen die erste horizontal, die zweite vertical wirkt. Es ist dann die Gleichung

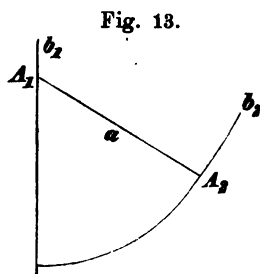
$$Uh = (V + G)\frac{h}{2}$$

die Gleichgewichtsbedingung.

Ist P in horizontaler Richtung thätig, so muss es gleich $\frac{1}{30}kh^5$ (also gleich der Hälfte des Pyramidengewichtes) sein.

Aufgabe 104. Eine vollkommen starre Gerade A_1A_2, welche das Gewicht G und die Länge a besitzt (Fig. 13) gleitet mit dem Ende A_1 auf einer geradlinigen verticalen Bahn b_1, mit dem Ende A_2 auf einer nach einer Parabel gekrümmten Bahn b_2. Die Achse dieser parabolischen Bahn fällt mit b_1 zusammen; der Halbparameter ist p. Beide Bahnen sind vollkommen glatt, es findet also keine Reibung statt.

Fig. 13.



Man soll berechnen, in welcher Lage die Gerade A_1A_2 im Gleichgegewichte ist und wie gross die Pressungen sind, welche die Bahnen b_1 und b_2 hierbei erleiden.

Lösung. Wir nehmen den Durchschnittspunkt der beiden Bahnen als Coordinatenanfang, legen die positive x-Achse horizontal nach rechts, die positive z-Achse senkrecht nach oben (also mit b_1 zusammenfallend), nennen denjenigen Winkel, welchen die Tangente der Curve b_2 mit der positiven Abscissenachse einschliesst, τ und denken uns die Widerstände, welche die Bahnen b_1, b_2 leisten, durch die Normalreactionen N_1, bezüglich N_2, ersetzt.

Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen

1) $$N_1 - N_2 \sin\tau = 0,$$

2) $$-G + N_2 \cos\tau = 0,$$

und, wenn der Coordinatenanfang als Drehpunkt aufgefasst wird,

3) $$N_1(z + \sqrt{a^2 - x^2}) - (N_2 \sin\tau)z + \tfrac{1}{2}Gx - (N_2 \cos\tau)x = 0;$$

aus denselben folgt zunächst

4) $$N_2 = G\frac{\sqrt{p^2 + x^2}}{p},$$

5) $$N_1 = G\frac{x}{p}.$$

Mithin befindet sich die Gerade A_1A_2 im Gleichgewichte, wenn entweder

6) $$x = 0,$$

oder wenn

7) $$x = \sqrt{a^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Hat sie die letztere Lage, so erleidet die geradlinige Bahn b_1 die Pressung

$$8) \qquad N_1 = \frac{G}{p}\sqrt{a^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

die parabolische (b_2) hingegen hat dann den Normaldruck

$$9) \qquad N_2 = \frac{G}{2p}\sqrt{3p^2 + 4a^2}$$

auszuhalten.

Steht A_1A_2 senkrecht, so ist, nach 6), 5) und 4),

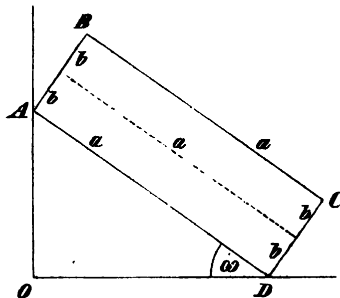
$$N_1 = 0, \quad N_2 = G,$$

was mit der Anschauung übereinstimmt.

Sämmtliche durch die Gleichungen Nr. 4) bis 9) angegebenen Werthe lassen sich leicht construiren; es sei die Ausführung dieser Constructionen empfohlen. — Ferner möge angerathen werden, die Aufgabe 104 derartig zu lösen, dass man den Punkt A_2 (an Stelle des Coordinatenanfanges) als Drehpunkt auffasst.

Aufgabe 105. Gegen eine wagrechte, nicht eindrückbare Unterlage und gegen eine ebenfalls vollkommen feste senkrechte Wand stützt sich, in der durch Fig. 14 näher angegebenen Weise, ein gerader Cylinder (Achsenlänge a, Basisradius b) ohne Reibung. Seine Dichtigkeit ist derartig veränderlich, dass das Gewicht der Volumeneinheit immer aus einem constanten Theile k und aus einem veränderlichen besteht, der dem Abstande von der Deckfläche AB proportional zunimmt und für die Einheit dieses Abstandes den Werth n besitzt.

Fig. 14.



Der Cylinder wird durch die im Stützpunkte D angreifende und senkrecht zur verticalen Wand wirkende Kraft S im Gleichgewichte erhalten (am Ausgleiten gehindert).

Die Grösse dieser Kraft S und diejenige der Pressungen, welche die verticale Wand bei A und die horizontale Unterlage bei D erleiden, soll berechnet werden, auch soll man angeben, für welchen Werth des Winkels ω der auf die senkrechte Wand ausgeübte Druck zu Null wird.

Lösung. Nach Anleitung der diesem Capitel vorausgeschickten „Zusammenstellung“ ergeben sich leicht drei das Gleichgewicht ausdrückende Gleichungen, bei deren Aufstellung der Gegendruck der senkrechten Wand mit N_1, derjenige der wagrechten Unterlage mit N_2 und das Cylindergewicht mit P bezeichnet werden möge. Sie liefern zunächst

$$N_2 = P,$$

also den Satz: die Pressung, welche die horizontale Unterlage erfährt, ist dem Gewichte des Cylinders gleich. Letzteres aber besitzt (nach Lösung der Aufgabe 89) den Werth

$$P = \tfrac{1}{2}(2k + na)\pi ab^2.$$

Es lehren jene Gleichungen ferner, dass S gleich ist dem Drucke, welchen die verticale Wand erleidet, und liefern für diesen

$$N_1 = \frac{1}{a}\{(a-c)\cot\omega - b\}\, P,$$

wenn mit c der Abstand des Schwerpunktes von der Cylinderdeckfläche bezeichnet wird. Dieser Abstand ist (siehe Lösung von Nr. 89)

$$c = \frac{k + \frac{2}{3}na}{2k + na}\, a,$$

mithin

$$N_1 = \tfrac{1}{6}\pi b^2 \{(3k + na)\, a \cot\omega - (2k + na)\, 3b\}.$$

Der auf die senkrechte Wand ausgeübte Druck fällt hiernach so lange positiv aus, als

$$\cot\omega > \frac{b}{a-c}$$

und wird zu Null, wenn

$$\omega = \operatorname{arc\,cot}\frac{b}{a-c},$$

was mit der Anschauung übereinstimmt.

Falls n, verglichen mit k, einen sehr kleinen Werth hat, so gilt näherungsweise

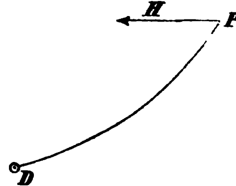
$$\left.\begin{matrix} N_2 \\ P \end{matrix}\right\} = \pi ab^2 k,$$

$$\left.\begin{matrix} N_1 \\ S \end{matrix}\right\} = \left(\tfrac{1}{2}\cot\omega - \frac{b}{a}\right) P = \left(\tfrac{1}{2}a\cot\omega - b\right)\pi b^2 k.$$

Aufgabe 106. An dem vollkommen starren, nur in der Bildebene gekrümmten Arme DP (Fig. 15) greift eine unver-

änderliche Kraft H an, welche (in der Ebene von DP) immer horizontal und nach links wirkt. Das Gewicht p der Volumeneinheit dieses Armes ist constant, sein Querschnitt q ebenfalls constant und so klein, dass der Arm als Curve aufgefasst werden darf.

Fig. 15.



Was für eine Linie muss DP sein, wenn für jede Länge ($DP = s$) derselben die Kraft H und das Armgewicht keine Drehung um D erzeugen, sich also stets aufheben sollen.

Lösung. Wir beziehen die Curve DP auf ein Coordinatensystem, dessen Ursprung D ist, dessen positive x-Achse horizontal nach rechts und dessen positive y-Achse vertical nach oben liegt. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$H\frac{dy}{dx} = pqx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$y = \frac{1}{pq}\left\{H - \sqrt{H^2-(pqx)^2}\right\}.$$

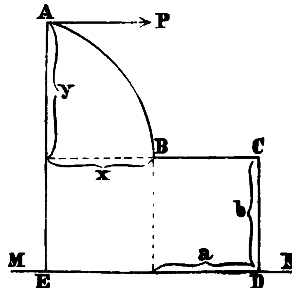
Der Arm DP muss also nach einer Kreislinie gekrümmt sein, deren Halbmesser

$$a = \frac{H}{pq}$$

ist und deren Mittelpunkt um a senkrecht über dem Drehpunkte D liegt.

Eine Probe auf dieses Resultat kann man dadurch machen, dass man — unter Zuhilfenahme der Lösung der Aufgabe 54 — untersucht, ob für jede Bogenlänge der genannten Linie das statische Moment des (im Schwerpunkte concentrirt gedachten) Gewichtes gleich ist dem der Kraft H.

Fig. 16.



Aufgabe 107. Ein Mauerkörper von der (zur Bildebene der Fig. 16 senkrecht stehenden) Länge c, dessen Volumeneinheit das Gewicht q hat, besitzt das Profil $ABCDE$ und steht auf einer uneindrückbaren Horizontalebene MN, auf welcher er unverschiebbar, wohl aber um D kantbar, ist.

Es soll ermittelt werden, nach was für einer Curve AB gekrümmt sein muss, wenn, für jeden Werth von x, das Gewicht der Mauer einer parallel zu MN (und senkrecht zur Längskante D) wirkenden constanten Kraft P, die den Körper umwerfen will, das Gleichgewicht halten soll.

Lösung. Aus der leicht aufzustellenden Gleichgewichtsbedingung (Momentegleichung) folgt ohne Schwierigkeit

$$y = b\left(e^{\frac{2ax+x^2}{a^2}} - 1\right)$$

als Gleichung derjenigen Linie, nach welcher AB gekrümmt sein muss.

Durch Verschiebung der x-Achse des in Fig. 16 angedeuteten Coordinatensystems lässt sich dies noch etwas vereinfachen.

Aufgabe 108. Ein homogener Stab A_1A_2 (Fig. 13 auf Seite 90), welcher als materielle Gerade angesehen werden darf, besitzt die Länge a und das Gewicht G. Das Ende A_1 ist verschiebbar auf einer geradlinigen, senkrechten Bahn b_1, das Ende A_2 auf einer gekrümmten b_2. Beide Bahnen liegen in der Verticalebene des Stabes, sind vollkommen starr, aber auch vollkommen glatt, so dass keine Reibung stattfindet.

Welcher Art muss die Bahn b_2 sein, wenn sich der Stab (auf den nur die eigene Schwere wirkt) in jeder Lage im Gleichgewichte befinden soll? Wie gross sind die Pressungen, die beide Bahnen erleiden? Wo sind sie am kleinsten, wo am grössten?

Lösung. Als Differentialgleichung derjenigen Curve, nach welcher b_2 gekrümmt sein muss, ergiebt sich

$$\sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{dz}{dx} = \tfrac{1}{2}x,$$

wobei der Schnittpunkt der beiden Bahnen als Ursprung des Coordinatensystems aufgefasst ist, die positive x-Achse horizontal nach rechts, die positive z-Achse senkrecht nach oben gedacht wird.

Die Integration der vorstehenden Gleichung liefert

$$z = \tfrac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

Es ist hiernach die gesuchte Linie eine Ellipse und zwar eine solche, deren grosse Halbachse die Länge a hat, während die kleine nur die Hälfte dieser Länge besitzt. Der Mittelpunkt der Curve liegt senkrecht über dem Durchschnittspunkte der Bahnen

b_1 und b_2. Jedes Rotationsellipsoid, welches entsteht, wenn man eine Ellipse mit dem Halbachsenverhältnisse 1 : 2 um die kleine Achse dreht, besitzt mithin die Eigenschaft, dass eine materielle Gerade von einer der halben grossen Achse gleichen Länge stets im Gleichgewichte ist, wenn man sie gegen die Rotationsachse und irgend einen Punkt der unteren Ellipsoidhälfte lehnt.

Für die von der Bahn b_1 auszuhaltende senkrechte Pressung ergiebt sich

$$N_1 = \tfrac{1}{2} G \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

oder auch

$$N_1 = \tfrac{1}{2} G \tan \omega,$$

wenn mit ω der von der Stange und der Lothrichtung gebildete spitze Winkel bezeichnet wird.

Die Bahn b_2 erleidet den Normaldruck

$$N_2 = \tfrac{1}{2} G \sqrt{\frac{4a^2 - 3x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Alle drei Ausdrücke sind leicht zu construiren.

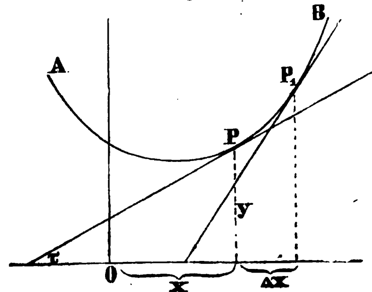
Steht $A_1 A_2$ senkrecht, so haben die Pressungen N_1 und N_2 ihre kleinsten Werthe, nämlich Null, bezüglich G; je schiefer die Stange liegt, desto grösser sind N_1 und N_2.

B. Aufgaben über das Gleichgewicht von Ketten und biegsamen Fäden.

α) Einfach gekrümmte Fäden (Ketten).

Aufgabe 109. Zwischen zwei festen Punkten A und B (Fig. 17) ist ein vollkommen biegsamer, undehnbarer, homogener Faden, mit dem constanten Querschnitte 1, aufgehangen. Seine Längeneinheit hat das Gewicht p. Nach welchem Gesetze sind in ihm die Spannungen (T) veränderlich und welche Form nimmt er im Gleichgewichtszustande an, wenn auf ihn nur seine eigene Schwere wirkt?

Fig. 17.



Lösung. Bezeichnet man die Fadenlänge, welche zwischen zwei Punkten P und P_1 liegt, deren Abscissen x und $x + \Delta x$ sind, mit Δs, die in P nach der Tangentenrichtung abwärts wirkende Spannung mit T, die in P_1 tangential aufwärts thätige mit $T + \Delta T$, die zu P und P_1 gehörenden Tangentenwinkel mit τ und $\tau + \Delta\tau$, so sind die Bedingungen für das Gleichgewicht des Fadens durch die Gleichungen

$$(T + \Delta T)\cos(\tau + \Delta\tau) - T\cos\tau = 0$$

und

$$(T + \Delta T)\sin(\tau + \Delta\tau) - T\sin\tau - p\Delta s = 0$$

ausgedrückt. Dieselben sprechen bekanntlich aus, dass eine Verschiebung in der Richtung der Coordinatenachsen nicht möglich ist. Als dritte Bedingung noch die einzuführen, dass auch Drehung unmöglich sein muss, ist überflüssig; thut man es, so erfährt man durch die neu hinzutretende Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} -xT\sin\tau + yT\cos\tau \\ +(x+\Delta x)(T+\Delta T)\sin(\tau+\Delta\tau) - (y+\Delta y)(T+\Delta T)\cos(\tau+\Delta\tau) \\ -(x+\alpha\Delta x)p\Delta s \end{array}\right\} = 0$$

schliesslich nichts weiter, als

$$\tan\tau = \frac{dy}{dx},$$

dass also die Spannung in der Richtung der Tangente wirken muss.

Aus den obigen zwei Gleichungen folgt

$$\frac{\Delta(T\cos\tau)}{\Delta x} = 0$$

und

$$\frac{\Delta(T\sin\tau)}{\Delta x} = p\frac{\Delta s}{\Delta x},$$

oder, beim Uebergange zur Grenze für verschwindende Δx,

1) $$\frac{d(T\cos\tau)}{dx} = 0,$$

2) $$\frac{d(T\sin\tau)}{dx} = p\frac{ds}{dx}.$$

Nach 1) hat man

3) $$T\cos\tau = Const. = C,$$

mithin den Satz: Die Horizontalspannung ist überall gleich gross.

Für den Scheitel der Fadencurve ist $\tau = 0$; die daselbst herrschende Spannung wird passend mit T_0 bezeichnet; dann ist

4) $$T_0 = C,$$

die Integrationsconstante bedeutet also die Scheitelspannung.

Aus 3) und 4) folgt weiter

5) $$T = T_0 \sec \tau,$$

d. h. die Spannungen wachsen vom Scheitel aus wie die goniometrischen Secanten der Tangentenwinkel. Im Scheitel herrscht die kleinste Spannung.

Zur Bestimmung der Curvengleichung hat man, nach 5) und 2),

$$\frac{d\,(T_0 \tan \tau)}{dx} = p\,\frac{ds}{dx};$$

daraus ergiebt sich

$$x = kl\,(y' + \sqrt{1 + y'^2}) + C_1,$$

worin y' so viel wie $\frac{dy}{dx}$ bedeutet und zur Abkürzung

6) $$\frac{T_0}{p} = k$$

gesetzt ist. Denkt man sich das Coordinatensystem parallel zur anfänglichen Lage bis in den Curvenscheitel verschoben, so hat man

$$x = kl\,(y' + \sqrt{1 + y'^2})$$

oder

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) + C_2.$$

Hierbei ergiebt sich der Werth der Constante C_2 zu $-k$. Die Gleichung wird daher einfacher, wenn man die x-Achse nicht in den Scheitel, sondern um die Strecke k tiefer legt; sie lautet dann

7) $$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Dies ist die eleganteste Form, in welcher man die Gleichung der vorliegenden Fadencurve (die bekanntlich gemeine Kettenlinie oder Seilcurve genannt wird) zu geben vermag. In derselben bedeutet der Parameter k geometrisch den Abstand des Scheitels vom Coordinatenanfange, mechanisch, nach Gleichung 6), das Verhältniss der Scheitelspannung zum Gewichte der Längeneinheit. Wie dieser Parameter aus verschiedenen gegebenen Bestimmungsstücken gefunden werden kann, lehrt die Lösung der folgenden Aufgabe. Hat man ihn, so ist, nach 6), auch die Scheitelspannung T_0 bekannt. Nach 5) und 7) kann T näher berechnet werden.

Aufgabe 110. Der Parameter k der gemeinen Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

(siehe Lösung der vorigen Aufgabe) soll bestimmt werden

α) aus der Kettenlänge $ACB = 2s$ und der Einsenkungstiefe (dem Pfeile) $DC = t$;

β) aus s und der Ordinate $EB = b$;

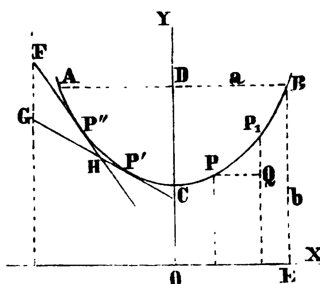
γ) aus s und dem Aufhängungswinkel α (d. i. der Winkel, welchen die Tangente in B mit der x-Achse bildet);

δ) aus s und der Spannweite $AB = 2a$;

ε) aus dieser Spannweite und dem Pfeile t;

ζ) aus der gegenseitigen Lage zweier Punkte P und P_1, welche durch die Strecken $PQ = m$, $QP_1 = n$ gegeben ist, und aus der zwischen beiden liegenden Kettenlänge L.

Fig. 18.



Lösung. α) Zwischen s, t und k besteht die Beziehung

$$s^2 = (t + k)^2 - k^2 = t^2 + 2tk;$$

es ist also

1) $$k = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{s^2 - t^2}{t},$$

was sich sehr leicht construiren lässt.

Statt auf diese, kann man auch auf folgende Weise verfahren: Wird die Scheiteltangente als x-Achse genommen, so ist

$$y = k(\sec\tau - 1) \quad \text{und} \quad s = k\tan\tau;$$

mithin

$$\frac{t}{s} = \frac{\sec\alpha - 1}{\tan\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}.$$

Hiermit hat man α und dann auch k, weil

$$k = s\cot\alpha.$$

β) Durch s und b ausgedrückt ist

2) $$k = \sqrt{b^2 - s^2}.$$

γ) Wie oben hat man $k = s\cot\alpha$.

δ) I. Zwischen a, k und s besteht die Gleichung

$$s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{a}{k} = u$, also

3)
$$k = \frac{a}{u},$$

so ist

$$s = \frac{a}{2u}(e^u - e^{-u})$$

oder

4)
$$\frac{e^u - e^{-u}}{2u} = \frac{s}{a}.$$

Zur Auflösung dieser transcendenten Gleichung benutzt man Tafeln, die für die laufenden Werthe von u die zugehörigen von $\frac{e^u - e^{-u}}{2u}$ enthalten. Ist u bestimmt, so hat man auch k.

II. Statt dieser Tabellen kann man auch solche anwenden, die man bei Einführung eines Hilfswinkels erhält. Wird nämlich

5)
$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = \cot\theta$$

gesetzt, wo also θ das Complement des Aufhängewinkels bedeutet, so folgt

$$e^u = \cot\frac{\theta}{2},$$

daher

6)
$$u = l\cot\frac{\theta}{2};$$

mithin geht 4) über in

$$\tan\theta \,.\, l\cot\frac{\theta}{2} = \frac{a}{s}.$$

Berechnet man nun für die laufenden Werthe von θ die von $\tan\theta \,.\, l\cot\frac{\theta}{2}$ und geht in die dadurch erhaltenen Tafeln mit dem gegebenen $\frac{s}{a}$ ein, so findet man das zugehörige θ. Dann hat man u nach 6), oder, wenn man lieber gemeine Logarithmen benutzt,

$$u = \frac{1}{\log e}\log\cot\frac{\theta}{2} = 2{,}302\ldots\log\cot\frac{\theta}{2}.$$

Damit ist auch k bekannt.

III. Wer Tabellen, wie die unter I. und II. besprochenen, nicht besitzt und nicht berechnen will, kann die Gleichung 4) näherungsweise durch Anwendung der Reihe

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{u}{1} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} + \dots,$$

die bekanntlich für jedes endliche u gilt, auflösen.

IV. Statt dieser arithmetischen Lösungen kann man auch eine geometrische anwenden, indem man die Curve $v = e^u - e^{-u}$ und die Gerade $v = 2\frac{s}{a}u$ zeichnet, wobei man den Durchschnittspunkt beider erhält. Der Werth der Abscisse desselben ist dasjenige u, welches der Gleichung 4) genügt.

ε) I. Als Beziehung zwischen a, k und t hat man

$$t = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}\right) - k,$$

aus welcher transcendenten Gleichung der Parameter k für je zwei zusammengehörige Zahlenwerthe von a und t berechnet werden kann. Setzt man nach und nach a etwa gleich $0{,}01\,k$, $0{,}02\,k$, $0{,}03\,k, \dots$, oder, allgemein, $a = \lambda_1 k$, $\lambda_2 k$, $\lambda_3 k$, ... $\lambda_n k$, so erhält man die zugehörigen t nach der letzten Formel zu $\mu_1 k$, $\mu_2 k$, $\mu_3 k, \dots$ $\mu_n k$; ferner die Quotienten $\frac{t}{a}$ zu ν_1, ν_2, ν_3, ... ν_n. Stellt man diese Werthe in einer Tabelle zusammen, so kann man aus dieser für jedes gegebene $\frac{t}{a} = \nu_n$ die zugehörigen Werthe $a = \lambda_n k$ und $t = \mu_n k$ entnehmen, hat mithin

$$k = \frac{a}{\lambda_n}, \text{ oder } k = \frac{t}{\mu_n}.$$

II. Die Herstellung solcher Tafeln zur Bestimmung von k aus a und t kann auch noch auf andere Weise erfolgen. Es ist nämlich

$$t = k(\sec\alpha - 1)$$

und

$$a = k\, l \tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right);$$

man hat also

$$\frac{t}{a} = \frac{\sec\alpha - 1}{l\tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\; l\tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Nach dieser Gleichung, welche sich leicht logarithmisch behandeln lässt, kann eine Tabelle berechnet werden, die für $a = 1^0$,

2^0, 3^0,... die Beträge von $\dfrac{2\, sin^2 \frac{\alpha}{2}}{cos\, \alpha\, l\, tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}$ enthält. Geht man in diese mit dem gegebenen Werthe von $\frac{t}{a}$ ein, so ergiebt sich der zugehörige von α. Dann hat man auch k, weil

$$k = \frac{t}{sec\, \alpha - 1} = \frac{t\, cos\, \alpha}{2\, sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

ist, was wiederum leicht logarithmisch berechnet werden kann.

ζ) Wird der Bogen CP (Fig. 18) mit s bezeichnet, so folgt aus den bekannten Gleichungen

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) \text{ und } s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

für den Punkt P

$$y + s = ke^{\frac{x}{k}}, \quad y - s = ke^{-\frac{x}{k}};$$

ebenso für P_1

$$(y+n) + (s+L) = ke^{\frac{x+m}{k}}, \quad (y+n) - (s+L) = ke^{-\frac{x+m}{k}}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{L^2 - n^2}}{m} = \frac{k}{m}\left(e^{\frac{m}{2k}} - e^{-\frac{m}{2k}}\right),$$

oder, wenn man zur Abkürzung $\frac{m}{k} = z$ setzt,

$$\frac{\sqrt{L^2 - n^2}}{m} = \frac{1}{z}\left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right).$$

Aus dieser Gleichung kann z auf ähnliche Weise hergeleitet werden, wie u unter δ) aus der dortigen Formel 4) gefunden worden ist. Hat man aber z, so hat man auch k, weil $k = \frac{m}{z}$.

Aufgabe 111. Für die in den Aufgaben 109 und 110 behandelte gemeine Kettenlinie soll Folgendes untersucht werden: I. Die Beziehung der Spannung T zur Ordinate y; II. die zur Normale N und zum Krümmungsradius ϱ; III. die zur Scheitelspannung T_0 und dem Gewichte des vom Scheitel an gerechneten Bogens; IV. die Beziehung dieses Bogengewichtes zur Verticalcomponente

V der Spannung T; V. die zwischen T, T_0 und V; endlich VI. die, in welcher die Seiten HG und HF (Fig. 18) des Dreiecks HGF zu den in P' und P'' herrschenden Spannungen stehen, wenn HG die Tangentenrichtung für P', HF die für P'' und wenn GF parallel zur y-Achse, also in der Richtung der Schwere, genommen ist.

Lösung. Man gelangt leicht zu folgenden Resultaten:

I. Die Spannung ist gleich dem Gewichte eines der Ordinate gleichen Curvenbogens ($T = py$); oder: die Spannungen sind den Ordinaten proportional.

II. Sie verhalten sich auch wie die Quadratwurzeln der Normalen, oder der Krümmungsradien ($T = p\sqrt{kN}$; $T = p\sqrt{k\varrho}$).

III. Das Quadrat der Spannung in irgend einem Punkte, vermindert um das der Scheitelspannung, ist gleich dem Quadrate des Gewichtes des zwischen dem Scheitel und jenem Punkte gelegenen Bogens $[T^2 - T_0^2 = (ps)^2]$.

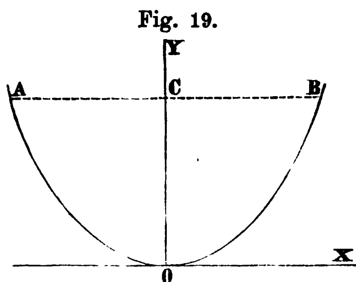
IV. Die Verticalcomponente ist gleich dem Gewichte des vom Scheitel an gerechneten Kettenlinienbogens ($V = ps$).

V. Das Quadrat der Spannung in irgend einem Punkte, vermindert um das der Scheitelspannung, ist gleich dem Quadrate der zu dem Punkte gehörenden Verticalspannung ($T^2 - T_0^2 = V^2$).

VI. Die Dreiecksseiten HG und HF verhalten sich wie die in den Punkten P' und P'' herrschenden Spannungen.

Aufgabe 112. Zwischen zwei festen Punkten A und B (Fig. 19) hängt ein vollkommen biegsames, undehnbares Seil (oder eine Kette), dessen Längeneinheit das constante Gewicht p hat. Wegen einer an dem Seile befestigten Brückenbahn trägt jede horizontale Längeneinheit desselben ausserdem noch die Last P. Es soll ermittelt werden, nach welchem Gesetze die Spannungen in diesem Seile veränderlich sind und welche Gestalt es im Gleichgewichtszustande annimmt.

Fig. 19.



Lösung. Die Gleichgewichtsbedingungen sind (vergl. die Lösung der Aufgabe 109) für ein endliches Bogenstück Δs

$$(T+\Delta T)\cos(\tau+\Delta\tau)-T\cos\tau=0$$

und

$$(T+\Delta T)\sin(\tau+\Delta\tau)-T\sin\tau-p\Delta s-P\Delta x=0;$$

mithin für ein unendlich kleines

$$d(T\cos\tau)=0,$$
$$d(T\sin\tau)=p\,ds+P\,dx.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt (wie bei Nr. 109)

1) $$T=T_0\sec\tau$$

(wo T_0 wieder die Scheitelspannung bedeutet), als Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen.

Zur Herleitung der Gleichung der Seilform hat man hiernach

$$d(T_0\sec\tau\sin\tau)=p\,ds+P\,dx;$$

daraus ergiebt sich

2) $$T_0\int\frac{dy'}{p\sqrt{1+y'^2}+P}=x+Const.$$

Die Substitution $\sqrt{1+y'^2}-y'=u$, welche man gewöhnlich anwendet, um eine Wurzel von der Form $\sqrt{1+y'^2}$ wegzuschaffen, ist hier nicht brauchbar. Man muss vielmehr seine Zuflucht zu Näherungsrechnungen nehmen.

I. Setzt man $y'^2=0$, was freilich nur bei sehr flacher Spannung zulässig ist, so wird 2) zu

$$T_0\int\frac{dy'}{P+p}=x+Const.$$

Es folgt also

$$\frac{T_0}{P+p}y'=x,$$

wobei keine Constante hinzuzufügen ist, weil für $x=0$ auch $y'=0$ sein muss. Bezeichnet man zur Abkürzung $\frac{T_0}{P+p}$ mit k und beachtet, dass x und y gleichzeitig zu Null werden, so liefert die soeben erhaltene Gleichung:

3) $$y=\frac{x^2}{2k},$$

d. h. die Curve ist dann eine gemeine Parabel mit dem Halbparameter $k=\frac{T_0}{P+p}$.

II. Man kann ferner

$$\sqrt{1+y'^2}=m+ny'$$

setzen (wobei m und n Coefficienten nach Poncelet). Dann folgt aus 2)

$$\frac{T_0}{pn} l(P+mp+npy') = x + Const.$$

Die Constante bestimmt sich hier aus der Bedingung, dass für $x=0$ auch $y'=0$ sein muss; dies eingeführt und zur Abkürzung

$$P+mp=A,$$
$$np=B,$$
$$\frac{T_0}{np}=\varkappa$$

gesetzt, giebt

$$l\frac{A+By'}{A}=\frac{x}{\varkappa},$$

also

$$y=\frac{A}{B}\left(\varkappa e^{\frac{x}{\varkappa}}-x\right)+Const.$$

Da x und y gleichzeitig in Null übergehen, so hat die Constante den Werth $-\frac{A}{B}\varkappa$; mithin ist

4) $$y=\frac{A}{B}\left(\varkappa e^{\frac{x}{\varkappa}}-x-\varkappa\right)$$

die Gleichung der Seilform.

III. Auf eine dritte Weise kann man in 2) die Wurzel loswerden, wenn man näherungsweise (nach dem binomischen Satze)

$$\sqrt{1+y'^2}=1+\tfrac{1}{2}y'^2$$

setzt. Dann ergiebt sich

$$\frac{T_0}{\alpha\beta} arc\ tan \frac{\beta}{\alpha} y' = x + Const.,$$

wo zur Abkürzung

$$P+p \text{ mit } \alpha^2$$

und

$$\frac{p}{2} \text{ mit } \beta^2$$

bezeichnet worden ist. Da nun x und y' gleichzeitig zu Null werden müssen, so ist die Constante $=0$ und man erhält

$$y=-\frac{T_0}{\beta^2} l \cos\frac{\alpha\beta}{T_0}x$$

als eine dritte näherungsweise geltende Gleichung der untersuchten Kettenbrückenlinie.

Aufgabe 113. Ein vollkommen biegsamer, undehnbarer, homogener Faden von veränderlichem Querschnitte unterliegt nur der eigenen Schwere und ist zwischen zwei festen Punkten A und B (Fig. 19) aufgehangen. Die Einsenkungstiefe $CO = b$, die Spannweite $AB = 2a$, das Fadengewicht $2G$ und das Gewicht γ der Volumeneinheit sind gegeben. Der Faden soll überall gleich stark gespannt sein, d. h. es soll $\frac{T}{q}$ immer denselben Werth haben, wie $\frac{T_0}{q_0}$, wenn T die Spannung und q den Querschnitt an irgend einer Stelle bezeichnen, T_0 und q_0 aber diese Grössen für den Scheitel bedeuten. Man sucht für diese gleichgespannte Seilcurve oder gleichgespannte Kettenlinie I. die an jedem Punkte herrschende Spannung, II. die Gleichung der Curvengestalt.

Lösung. Wird der Tangentenwinkel im Punkte xy mit τ, das Bogendifferential mit ds bezeichnet, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen

1) $$d(T\cos\tau) = 0$$

und

$$d(T\sin\tau) = \gamma q\, ds.$$

Da nun $\frac{T}{q} = \frac{T_0}{q_0}$, also $q = q_0 \frac{T}{T_0}$ sein soll, so geht die letzte derselben in

2) $$d(T\sin\tau) = \gamma q_0 \frac{T}{T_0} ds$$

über. Aus der Gleichung 1) folgt

3) $$T = T_0 \sec\tau,$$

d. h. die Spannungen sind proportional den goniometrischen Secanten der Tangentenwinkel (vergl. die Lösungen der Aufgaben 109 und 112).

Setzt man 3) in 2) ein, so ergiebt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$T_0 \operatorname{arc\,tan} y' = \gamma q_0 x + Const.$$

Weil nun für $x = 0$ auch $y' = 0$ sein muss, so ist die Constante ebenfalls Null und man hat weiter

4) $$y' = \tan \frac{\gamma q_0}{T_0} x,$$

5) $$y = \frac{T_0}{\gamma q_0} l \sec \frac{\gamma q_0}{T_0} x,$$

wo wieder keine Constante beigefügt zu werden braucht. Hiermit ist die Curvengestalt bestimmt, und durch die sofort folgende Gleichung

6) $$T = T_0 \sec \frac{\gamma q_0}{T_0} x$$

auch die Spannung, wenn nur T_0 und q_0 noch ermittelt werden. Dies kann leicht folgendermassen geschehen: Da der Faden durch den Punkt A geht, so muss, nach 5),

$$b = \frac{T_0}{\gamma q_0} l \sec \frac{\gamma q_0}{T_0} a$$

sein, oder, wenn man zur Abkürzung

7) $$\frac{\gamma q_0 a}{T_0} = \theta$$

setzt,

8) $$\frac{b}{a} = \frac{l \sec \theta}{\theta}.$$

Die zweite Gleichung zur Bestimmung der beiden Unbekannten T_0 und q_0 ergiebt sich aus der Bedingung, dass der Faden das Gewicht $2G$ haben soll. Sie liefert

$$G = \int_{x=0}^{x=a} \gamma q \, ds = \gamma q_0 \int_0^a \sec^2 \frac{\gamma q_0 x}{T_0} dx,$$

$$G = T_0 \tan \theta.$$

Daraus folgt

9) $$T_0 = G \cot \theta$$

und

10) $$q_0 = \frac{G}{a \gamma} \theta \cot \theta.$$

Durch die Gleichungen 5) bis 10) ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Aufgabe 114. Wie Nr. 113, nur mit dem Unterschiede, dass der Faden nicht blos seinem eigenen Gewichte unterliegt, sondern für die horizontale Längeneinheit auch noch die Last P zu tragen hat. Gesucht wird für diese gleichgespannte Kettenbrückenlinie das Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen, wie der Querschnitte und die Gestalt der Curve unter Beifügung der Bedingung, dass die absolute Festigkeit des Materials $= F$ sein und die Kette überall die n-fache Sicherheit bieten soll.

Lösung. Wie bei Nr. 112 ergiebt sich

$$T_0 \int \frac{dy'}{P + p\sqrt{1+y'^2}} = x + Const.$$

Hier ist aber p nicht constant, sondern

$$p = q\gamma = q_0 \gamma \sqrt{1+y'^2},$$

mithin

$$T_0 \int \frac{dy'}{P + \gamma q_0 (1+y'^2)} = x + Const.$$

Daraus folgt

$$y' = \frac{k}{m} \tan \frac{x}{m},$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{T_0}{\gamma q_0} = k$$

und

$$\frac{T_0}{\sqrt{(P+\gamma q_0)\gamma q_0}} = m$$

gesetzt wird; daher als Gleichung der Kettenform

$$y = kl \sec \frac{x}{m}.$$

Wird ferner die Spannung, welche für die Flächeneinheit zugelassen werden soll, also der Werth $\frac{F}{n}$, mit f bezeichnet und

$$\frac{a\sqrt{(P+q_0\gamma)\, q_0\gamma}}{q_0 f} = \theta$$

gesetzt, so ergeben sich die noch zu ermittelnden Constanten zu

$$q_0 = \frac{a^2 P \gamma}{\theta^2 f^2 - a^2 \gamma^2} = \frac{\frac{P}{\gamma}}{\left(\frac{\theta f}{a\gamma}\right)^2 - 1},$$

$$T_0 = q_0 f,$$

wobei θ durch

$$l \sec \theta = \frac{b\gamma}{f}$$

bestimmt ist. Da nun

$$T = T_0 \sec \tau$$

und

$$q = q_0 \sec \tau$$

sein muss, so ist hiermit Alles bekannt.

Aufgabe 115. Zwischen zwei festen Punkten A und B (Fig. 19 auf Seite 102) ist ein vollkommen biegsamer, undehnbarer, schwerer Faden aufgehangen, welcher die constante Materialdichtigkeit ε hat. Es möge berechnet werden, nach welchem Gesetze sich seine Querschnitte q ändern müssen, wenn der Faden die Form eines Halbkreises vom Radius r annehmen und wenn der Scheitelquerschnitt $= q_0$ sein soll. Man möge ferner ermitteln, auf welche Art die in ihm herrschenden Spannungen veränderlich sind.

Lösung. Auf ähnliche Weise, wie bei der Lösung der Aufgaben 109) bis 114) gelangt man zu den Resultaten

$$q = \frac{r^2}{r^2 - x^2} q_0 = \frac{r^2}{(r-y)^2} q_0,$$

$$T = \frac{r^2 g \varepsilon}{\sqrt{r^2 - x^2}} q_0 = \frac{r^2 g \varepsilon}{r - y} q_0,$$

$$\frac{T}{q} = g \varepsilon \sqrt{r^2 - x^2} = g \varepsilon (r - y),$$

mithin zu den Sätzen: Die Querschnitte müssen sich umgekehrt wie die Quadrate der verticalen Abstände von der Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte verhalten; die Spannungen verhalten sich umgekehrt wie die ersten Potenzen dieser Entfernungen; die auf die Querschnittseinheit kommenden Spannungen direct wie diese ersten Potenzen.

Aufgabe 116. Wie Nr. 115, nur mit dem Unterschiede, dass der Faden die Form der gemeinen Parabel

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

annehmen soll.

Lösung. Es ergiebt sich

$$q = \frac{p}{\sqrt{p^2 + x^2}} q_0,$$

$$T = \frac{\sqrt{p^2 + x^2}}{p} T_0 = g \varepsilon \sqrt{p^2 + x^2}\, q_0,$$

$$\frac{T}{q} = \frac{p^2 + x^2}{p^2} \cdot \frac{T_0}{q_0} \text{ und } Tq = T_0 q_0.$$

Die letzte dieser Gleichungen sägt: die Spannungen wachsen umgekehrt wie die Querschnitte. Da ferner $\sqrt{p^2 + x^2}$ die Länge der zu dem Punkte xy gehörenden Parabelnormale darstellt, so lehren

die für q und T gefundenen Werthe, dass die Querschnitte jener Länge umgekehrt, die Spannungen hingegen ihr direct proportional sind.

Aufgabe 117. Der in der Aufgabe 115 angegebene Faden soll eine Form annehmen, welcher die allgemeine Gleichung

$$y = f(x)$$

zukommt. Gesucht werden wieder die Gesetze für die Veränderlichkeit der Querschnitte und der Spannungen.

Lösung. Man findet zunächst

$$T = T_0 \sec \tau$$

und

$$q = \frac{T_0}{g\varepsilon} \cdot \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}.$$

Hierin bedeutet T_0 abermals die Scheitelspannung. Für dieselbe ergiebt sich

$$T_0 = \frac{g\varepsilon}{f''(o)} q_0,$$

wobei q_0, wie früher, der Scheitelquerschnitt. Mithin ist

$$q = \frac{f''(x)}{f''(o)\sqrt{1 + f'(x)^2}} q_0$$

das Gesetz für die Veränderlichkeit der Querschnitte und

$$T = g\varepsilon \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{f''(o)} q_0$$

das für die der Spannungen.

Aufgabe 118. Der Querschnitt q eines zwischen A und B (Fig. 19, Seite 102) aufgehangenen, undehnbaren, vollkommen biegsamen, aber nicht homogenen Fadens, welcher nur der Wirkung der Schwere unterworfen ist, ändert sich proportional dem Quadrate der Abscisse und hat für die Einheit derselben den Werth k. Es soll ermittelt werden: I. nach welchem Gesetze die Dichtigkeit ε des Fadens veränderlich sein muss, wenn derselbe die Form einer halben Ellipse mit den Halbachsen $CB = a$, $CO = b$ annehmen und im Scheitel O die in bestimmter Grösse vorgeschriebene Spannung T_0 haben soll; II. wie in diesem Faden die Spannungen veränderlich sind; III. wie die Resultate für den Fall lauten, dass die halbe Ellipse zu einem Halbkreise wird.

Lösung. Nach Anleitung der Lösung der Aufgaben 109 bis 114 findet man

$$T = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2 - x^2}}\, T_0$$

als Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen und

$$\varepsilon = \frac{a^2 b}{kg} \cdot \frac{T_0}{x^2(a^2 - x^2)\sqrt{a^4 - c^2x^2}}$$

als das für die der Dichtigkeiten, wobei c die lineare Excentricität der Ellipse bedeutet.

Für den Kreis ergeben sich hieraus die einfacheren Gleichungen

$$T = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, T_0$$

und

$$\varepsilon = \frac{a}{kg} \cdot \frac{T_0}{x^2(a^2 - x^2)},$$

welche leicht in Worte übersetzt werden können, wenn man beachtet, dass $\sqrt{a^2 - x^2} = a - y$ ist, mithin den senkrechten Abstand von der Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte darstellt.

Aufgabe 119. Ein homogener, undehnbarer, vollkommen biegsamer Faden ist so aufgehangen, dass er durch den Punkt ab geht (Fig. 18 auf Seite 98) und im Scheitel C die Ordinate c hat. Sein Querschnitt q ist veränderlich und zwar derartig, dass immer

$$q = q_0 \cos\tau = q_0 \frac{dx}{ds},$$

wobei q_0 der vorgeschriebene Scheitelquerschnitt. Der Faden unterliegt nur dem Einflusse seiner eigenen Schwere und besitzt die Dichtigkeit ε. Man soll berechnen, welche Gestalt er im Gleichgewichtszustande annimmt und wie gross die Spannung an der allgemeinen Stelle desselben ist.

Lösung. Aus den hier geltenden Gleichgewichtsbedingungen folgt leicht

$$y - c = \frac{b - c}{a^2} x^2$$

als Gleichung der Fadengestalt; dieselbe ist also eine gemeine Parabel in der durch Fig. 18 (Seite 98) angedeuteten Lage. Ihr Parameter hat die Länge $\frac{a^2}{b - c}$, was man bekanntlich sehr leicht zu construiren vermag.

Die Spannung an der allgemeinen Stelle des Fadens ist

$$T = \frac{g\varepsilon q_0}{2(b-c)} \sqrt{a^4 + 4(b-c)^2 x^2},$$

wofür auch

$$T = \frac{g\varepsilon q_0 a}{2(b-c)} \sqrt{a^2 + 4(b-c)(y-c)}$$

geschrieben werden kann. Sie beträgt also im Scheitel am wenigsten und nimmt bei wachsendem x (oder y) fortwährend zu.

Aufgabe 120. An den Enden A und B einer unveränderlichen Geraden AB (Fig. 18, Seite 98) ist ein vollkommen biegsamer, undehnbarer, homogener Faden (eine Kette) aufgehangen. Die Gerade hat die Länge $2a$ und liegt im Abstande b parallel zur x-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems. Der Faden dreht sich um die y-Achse mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w, unterliegt aber sonst weiter keiner Kraft, als dem Einflusse der eigenen Schwere. Seine Scheitelordinate ist im Gleichgewichtszustande gleich c; sein Querschnitt q ändert sich so, dass immer

$$q = q_0 \cos\tau = q_0 \frac{dx}{ds}$$

ist, wobei q_0 den Scheitelquerschnitt bedeutet. Es soll berechnet werden, welche Form der Faden im Gleichgewichtszustande hat und nach welchem Gesetze hierbei die Spannungen in ihm veränderlich sind.

Lösung. Man findet zunächst

$$T = \tfrac{1}{2}(2T_0 - \varepsilon q_0 w^2 x^2)\frac{ds}{dx},$$

worin T_0 und ε dieselbe Bedeutung haben, wie in den vorhergehenden Aufgaben.

Hieraus folgt sodann

$$y = b + \frac{g}{w^2} l \frac{\varepsilon q_0 w^2 a^2 - 2T_0}{\varepsilon q_0 w^2 x^2 - 2T_0}.$$

Die in diesen Gleichungen vorkommende Scheitelspannung T_0 ergiebt sich leicht zu

$$T_0 = \frac{\varepsilon q_0 a^2 w^2}{2\left(1 - e^{\frac{c-b}{g}w^2}\right)}.$$

Dies liefert als Gleichung der Fadenform, wenn man zur Abkürzung

$$e^{\frac{c-b}{g}w^2} = h$$

setzt,

$$y = b + \frac{g}{w^2} l \frac{a^2 h}{a^2 - (1-h) x^2}.$$

Mithin erhält man als Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon q_0}{1-h} \sqrt{4 g^2 (1-h)^2 x^2 + w^4 [a^2 - (1-h) x^2]^2}.$$

Aufgabe 121. Es soll ermittelt werden, welcher Art die parallel zu den Coordinatenachsen auf jedes Fadenelement (Fig. 19, Seite 102) wirkenden Käfte X und Y sein müssen, wenn der vollkommen biegsame, undehnbare, gleichdicke und homogene Faden die Form einer Kreislinie annehmen und überall gleich stark gespannt sein soll.

Lösung. Man findet leicht, wenn zur Abkürzung

$$\frac{T}{a^2 q \varepsilon} = k$$

gesetzt wird, a den Kreisradius bedeutet, übrigens aber die schon vielfach benutzten Bezeichnungen gelten,

$$X = kx,$$
$$Y = -k(a-y).$$

Die Resultante von X und Y muss also

$$R = ka,$$

d. h. constant, sein.

Für ihre Richtung folgt, dass sie mit der des Halbmessers zusammenfällt. Auch ohne Rechnung sind diese Resultate leicht angebbar.

Aufgabe 122. Auf einen Faden, der zwischen zwei festen Punkten aufgehangen ist, wirken in seiner Ebene beliebige Kräfte, welche, parallel zu zwei rechtwinkligen Coordinatenachsen, für die Masse 1 die Resultanten $X = f_1(x)$, $Y = f_2(x)$ geben; derselbe hat die Länge s, die Dichtigkeit $\varepsilon = F(x)$, den Querschnitt $q = \Phi(x)$.

Man soll I. die Bedingungen für das Gleichgewicht des Fadens angeben und II. das allgemeine Gesetz herleiten, nach welchem sich die Spannungen (T) in ihm ändern.

Lösung. Die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen sind

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X \varepsilon q ds = 0$$

und

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y \varepsilon q ds = 0.$$

Aus denselben folgt

$$Td\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dx}{ds}dT=-\varepsilon qXds,$$

und

$$Td\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}dT=-\varepsilon qYds.$$

Da nun

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1$$

ist, also

$$\frac{dx}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

so erhält man, wenn diese zwei Gleichungen mit $\frac{dx}{ds}$, bezüglich $\frac{dy}{ds}$, multiplicirt und dann addirt werden,

$$dT=-\varepsilon q(Xdx+Ydy).$$

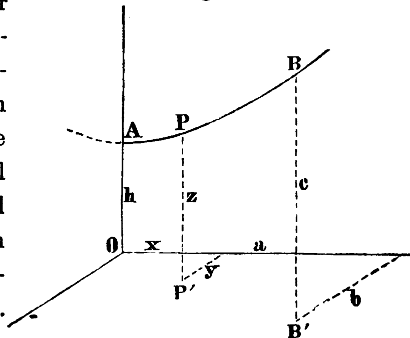
Das Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen lautet daher

$$T=-\int\varepsilon q(Xdx+Ydy).$$

β) Doppelt gekrümmte Fäden (Ketten).

Aufgabe 123. Auf den vollkommen biegsamen, undehnbaren, gleichdicken Faden AB (Fig. 20) wirken seine Schwere und, parallel zur x-Achse, pro Masseneinheit die Kraft $X=kx$. Er geht durch den auf der verticalen Coordinatenachse liegenden Punkt A, dessen z den Werth h hat, derart, dass seine Tangente daselbst die Winkel α, β und γ mit der x-, y- und z-Achse bildet; ferner durch den Punkt B, welchem die Coordinaten a, b und c zukommen. Seine Dichtigkeit ε ist veränderlich und zwar ist immer $\varepsilon=\varepsilon_0\cos\lambda=\varepsilon_0\frac{dx}{ds}$. Es soll die Form bestimmt werden, welche der Faden im Gleichgewichtszustande annimmt und das Gesetz, nach welchem in demselben die Spannungen veränderlich sind.

Fig. 20.



Lösung. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten hier, unter Beibehaltung der in den vorhergehenden Aufgaben benutzten Bezeichnungen,

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = -q\varepsilon_0 k x\, dx,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = q\varepsilon_0 g\, dx.$$

Aus denselben erhält man durch Integration und gehörige Beachtung der zur Constantenbestimmung vorliegenden Bedingungen

1) $$T = T_1 \cos\beta \frac{ds}{dy},$$

2) $$y = L \cos\beta\, l \frac{M + Nx}{M - Nx},$$

3) $$z = h + L \cos\gamma\, l \frac{M + Nx}{M - Nx} + \frac{g}{k}\, l \frac{M^2}{M^2 - N^2 x^2}.$$

in welchen Gleichungen zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{T_1}{2kq\varepsilon_0 \cos\alpha}} = L,$$

$$\sqrt{2 T_1 \cos\alpha} = M,$$

$$\sqrt{qk\varepsilon_0} = N$$

gesetzt worden ist und T_1 die in A herrschende Spannung bedeutet. Was die Letztere betrifft, so ist sie aus 2) oder 3) herleitbar, weil für $x = a$, y zu b und z zu c werden muss.

Aufgabe 124. Welche Kräfte X, Y und Z müssen parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems auf einen vollkommen biegsamen, homogenen, gleichstarken Faden wirken, wenn derselbe die Form der Schraubenlinie

$$x = a \cos\frac{z}{c}, \quad y = a \sin\frac{z}{c},$$

$$(c = a \tan\beta)$$

annehmen und wenn die in ihm herrschende Spannung T immer gleich bz sein soll?

Lösung. Die für diesen Fall geltenden Gleichgewichtsbedingungen liefern

$$Z = -\frac{b \sin^2 \beta}{q \varepsilon},$$

$$Y = \frac{b \cos^2 \beta}{a^2 q \varepsilon} (yz - cx),$$

$$X = \frac{b \cos^2 \beta}{a^2 q \varepsilon} (xz + cy)$$

als Werthe der gesuchten Kräfte.

Aufgabe 125. Ein Faden hat die Länge s, die Dichtigkeit $\varepsilon = F(x)$, den Querschnitt $q = \Phi(x)$, ist vollkommen biegsam, undehnbar und zwischen zwei festen Punkten aufgehangen. Er unterliegt der Wirkung von beliebig vielen Kräften, die parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems (siehe Fig. 20, Seite 113) die Resultanten $X = f_1(x)$, $Y = f_2(x)$, $Z = f_3(x)$ liefern. Man verlangt die Angabe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für denselben und das Gesetz, nach welchem in ihm die Spannungen (T) sich ändern.

Lösung. Die Gleichgewichtsbedingungen sind

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = -q \varepsilon X ds,$$

$$d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = -q \varepsilon Y ds,$$

$$d\left(T \frac{dz}{ds}\right) = -q \varepsilon Z ds.$$

Das Gesetz für die Spannungen ergiebt sich auf dieselbe Weise, wie bei der Lösung der Aufgabe 122 zu

$$T = -\int \varepsilon q (X dx + Y dy + Z dz).$$

Capitel V.

Aufgaben über die Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Wird ein System von Punkten, welches sich im Gleichgewichte befindet, unendlich wenig verrückt, so dass jeder Punkt desselben in eine neue, von der alten unendlich wenig verschiedene, Lage kommt, so nennt man bekanntlich die gerade Verbindungslinie dieser beiden Lagen die virtuelle Geschwindigkeit dieses Punktes.

Projicirt man diese virtuelle Geschwindigkeit auf eine Gerade MN, so heisst die entstehende Projection die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes bezogen auf die Gerade MN. Das Vorzeichen derselben ergiebt sich aus dem des Cosinus desjenigen Winkels, unter welchem projicirt wird.

Das Product aus der Intensität einer Kraft in die auf ihre Richtung bezogene virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes wird das virtuelle Moment der Kraft genannt.

Erleidet jeder Punkt eines im Gleichgewichte befindlichen Systems irgend eine unendlich kleine Verrückung (die aber natürlich mit den Bedingungen des Systems vereinbar sein muss), so ist immer die algebraische Summe aller virtuellen Momente (Arbeiten) gleich Null (oder: sie ist, verglichen mit jedem einzelnen dieser Momente, unendlich klein).

Umgekehrt: ist die algebraische Summe aller virtuellen Momente bei allen virtuellen Verrückungen gleich Null, so befindet sich das System im Gleichgewichte.

Bezeichnet man die Kräfte mit P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$, die Projectionen der Wege der Angriffspunkte auf die Richtungslinien der Kräfte mit p_1, p_2, $p_3, \ldots p_n$, so drückt die Gleichung

1) $$P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + \ldots + P_np_n = 0,$$
oder
$$\Sigma(Pp) = 0$$
das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aus.

Bezeichnen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Angriffspunktes einer Kraft P, welche die Winkel α, β, γ mit den Coordinatenachsen bildet, und nimmt man in der Richtung von P einen bestimmten Punkt abc an, der von xyz um s entfernt ist, so hat man
$$s^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$
und
$$p = ds = \frac{x-a}{s}dx + \frac{y-b}{s}dy + \frac{z-c}{s}dz,$$
oder
$$p = \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz;$$
mithin geht die Gleichung 1) über in
$$\left.\begin{array}{l} P_1(\cos\alpha_1\, dx_1 + \cos\beta_1\, dy_1 + \cos\gamma_1\, dz_1) \\ + P_2(\cos\alpha_2\, dx_2 + \cos\beta_2\, dy_2 + \cos\gamma_2\, dz_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$
oder in

2) $$\Sigma P(\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz) = 0.$$
Diese Sätze sollen zur Lösung der Aufgaben dieses Capitels vorausgesetzt werden.

Aufgabe 126. Die Aufgabe 13 soll mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten gelöst werden.

Lösung. Wird die Lage des Coordinatensystemes so angenommen, wie in der früheren Lösung der Aufgabe angeführt worden ist, werden ferner die Entfernungen des Punktes Q von den Punkten C_1, C_2, C_3 mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet und die drei Anziehungen P_1, P_2, P_3 genannt, so hat man als Gleichgewichtsbedingung
$$P_1du_1 + P_2du_2 + P_3du_3 = 0.$$
Hierbei ist
$$P_1 = km_1u_1, \quad P_2 = km_2u_2, \quad P_3 = km_3u_3,$$
$$u_1 = \sqrt{x^2+y^2}, \quad u_2 = \sqrt{(a_2-x)^2+y^2}, \quad u_3 = \sqrt{(x-a_3)^2+(b_3-y)^2}.$$
Nach Einsetzung dieser Werthe ergeben sich wieder die bei Nr. 13 angeführten Ausdrücke für x und y.

Aufgabe 127. Auf einen vollkommen frei beweglichen Punkt, welcher auf ein rechtwinkliges, räumliches Coordinatensystem bezogen ist, wirken die Kräfte

P_1 unter den Winkeln α_1, β_1, γ_1 (gegen die Achsen),
P_2 „ „ „ α_2, β_2, γ_2,
. . . .
P_n „ „ „ α_n, β_n, γ_n.

Es sollen die Bedingungen ermittelt werden, unter welchen der Punkt im Gleichgewichte ist.*

Lösung. Man denke sich, dass der Punkt eine unendlich kleine Verrückung s erleide, deren Richtung mit den Achsen die Winkel λ, μ, ν bilde und bezeichne die Projectionen von s auf die Kräfterichtungen mit $p_1, p_2, \ldots p_n$. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = 0.$$

Die hier noch zu eliminirenden p sind durch die Beziehungen

$$\frac{p_1}{s} = \cos\alpha_1 \cos\lambda + \cos\beta_1 \cos\mu + \cos\gamma_1 \cos\nu,$$
$$\frac{p_2}{s} = \cos\alpha_2 \cos\lambda + \cos\beta_2 \cos\mu + \cos\gamma_2 \cos\nu,$$
. . . .
$$\frac{p_n}{s} = \cos\alpha_n \cos\lambda + \cos\beta_n \cos\mu + \cos\gamma_n \cos\nu$$

bestimmt.

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots + P_n \cos\alpha_n = 0,$$
$$P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \ldots + P_n \cos\beta_n = 0,$$
$$P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \ldots + P_n \cos\gamma_n = 0$$

als Bedingungen für das Gleichgewicht.

Aufgabe 128. Ein Punkt kann sich nur auf einer räumlichen Curve bewegen, deren Gleichungen bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$y = f(x) \text{ und } z = \varphi(x)$$

sind. Auf denselben wirken beliebig viele Kräfte. Man sucht die Bedingung für sein Gleichgewicht.

Lösung. Denkt man sich alle Kräfte zu drei Resultanten X, Y, Z zusammengesetzt, welche parallel zu den Achsen thätig sind, und stellt sich vor, dass sich der Punkt auf der Curve um

* Dass die Lösung dieser Aufgabe, wie auch die aller folgenden dieses Capitels, eben durch Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten erfolgen soll, bedarf wohl kaum stets besonderer Erwähnung, da die Capitelüberschrift es deutlich genug ausspricht.

den unendlich kleinen Bogen ds verrückt habe, so ergiebt sich sofort als Gleichgewichtsbedingung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

was mit der Lösung der Aufgabe 41 übereinstimmt.

Aufgabe 129. Es sollen die Gleichgewichtsbedingungen für einen Punkt hergeleitet werden, welcher von beliebig vielen Kräften beeinflusst wird und sich nur auf einer Fläche bewegen kann, deren Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben ist.

Lösung. Auf ganz ähnliche Weise, wie in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$X + Z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

und

$$Y + Z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Dies stimmt überein mit Demjenigen, was bei Nr. 46 unter I. gefunden worden ist.

Aufgabe 130. Auf einer schiefen Ebene ABC, deren Neigungswinkel BAC gegen den Horizont AC gleich α ist, wird ein Körper K durch eine constante Kraft P beeinflusst, welche mit dem Horizonte den Winkel β bildet und im Schwerpunkte des Körpers angreift. Von der Reibung wird abgesehen. Man verlangt, dass mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten die Bedingung hergeleitet werden soll, unter welcher das Gewicht Q des Körpers und die Kraft P im Gleichgewichte sind.

Lösung. Wird der Schwerpunkt S um das unendlich kleine Stück SS_1 parallel zu AB (etwa aufwärts) verschoben gedacht, so ist $SS_1 . \cos(\beta - \alpha)$ die virtuelle Geschwindigkeit von S bezogen auf P und $SS_1 . \sin\alpha$ die in Bezug auf Q. Die Gleichgewichtsbedingung ist mithin

$$P\cos(\beta - \alpha) = Q\sin\alpha,$$

also für $\beta = \alpha$ sehr einfach

$$P = Q\sin\alpha.$$

Aufgabe 131. An einem Hebel ACA, welcher im Punkte C unterstützt ist, wirken zwei Kräfte P und P_1 in den Endpunkten A und A_1. Die von C auf die Kraftrichtungen gefällten Senkrechten haben die Längen a und a_1. Welches ist die Bedingung für das Gleichgewicht?

Lösung. Denkt man sich den Hebel aus der Ruhelage ACA_1 um den unendlich kleinen Winkel w herausgedreht, so dass A und A_1 die Bögen $AA' = b$ und $A_1A_1' = b_1$ beschreiben und bezeichnet die Projectionen von b und b_1 auf die Kraftrichtungen mit p und p_1, so hat man nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$-Pp + P_1p_1 = 0$$

als Gleichgewichtsbedingung.

Werden die Strecken CA und CA_1, c und c_1 genannt, so gelten die Beziehungen

$$p = \frac{ab}{c}, \quad p_1 = \frac{a_1 b_1}{c_1}.$$

Dies eingesetzt und gehörig beachtet, dass b und b_1 Kreisbögen sind, die zu gleichen Centriwinkeln gehören, giebt die bekannte Momentegleichung

$$Pa = P_1 a_1.$$

Aufgabe 132. Man soll mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichgewichtsbedingung für den gemeinen Flaschenzug herleiten, unter der Voraussetzung, dass die Seile als parallel angesehen werden können.

Lösung. Es sei P die Kraft (etwa ein Gewicht), welche am freien Seilende wirkt; Q die an der beweglichen Flasche hängende Last, der sie das Gleichgewicht halten soll.

Denkt man sich P um ein unendlich kleines Stück a gesenkt, Q um b hierbei gehoben, so muss

$$Pa - Qb = 0$$

sein. Sind nun in der beweglichen Flasche n Rollen, laufen von derselben aus also $2n$ Seile, so besteht die Beziehung

$$2nb = a.$$

Die gesuchte Gleichgewichtsbedingung ist mithin

$$P = \frac{Q}{2n}.$$

Aufgabe 133. Eine horizontal liegende Schraube S, deren Gänge die Höhe h haben und deren kreisförmiger Kopf den Radius a besitzt, geht durch eine feste Mutter und wirkt bewegend auf einen Körper K, welcher ihr den Widerstand Q entgegensetzt. An der Peripherie des Kopfes ist in tangentialer Richtung die Kraft P thätig. Es soll, bei Nichtbeachtung der Reibung, die Bedingung entwickelt werden, unter welcher P und Q im Gleichgewichte sind.

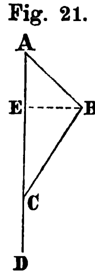
Lösung. Man denke sich P als ein Gewicht, welches mittelst eines Fadens den Schraubenkopf dreht. Senkt sich dieses Gewicht um die unendlich kleine Strecke s, so bewegt sich die Schraubenspitze um ein anderes ebenfalls unendlich kleines Stück s_1. Aus der zwischen s und s_1 bestehenden einfachen Beziehung ergiebt sich hiermit nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$P = \frac{h}{2a\pi} Q$$

als Gleichgewichtsbedingung.

Aufgabe 134. Mit einer festen Geraden AD (Fig. 21), auf welcher der Punkt C beweglich, A aber unbeweglich, steht eine gebrochene ABC so in Verbindung, dass AB um A drehbar ist und in B sich ein Gelenk befindet, welches gestattet, dass eine Kraft P den Punkt B der Geraden AD nähern kann, indem C herabgeschoben wird. P wirkt senkrecht gegen AD; eine andere Kraft Q, an C, in der Richtung CA. Die Gerade AB hat die Länge a, BC ist gleich b, $\angle ACB = \alpha$, $\angle CAB = \beta$; EB möge mit x, AC mit y bezeichnet werden.

Fig. 21.



Es soll die Gleichgewichtsbedingung für das vorliegende System von starren Geraden (Kniepresse) ermittelt werden und zwar I. als Beziehung zwischen P, Q, a, b und x; II. als solche zwischen P, Q, a, b und α oder β; III. endlich als eine Gleichung zwischen P, Q, α und β.

Lösung. Unter Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten findet man zunächst als Gleichgewichtsbedingung

$$P dx + Q dy = 0.$$

Bei gehöriger Beachtung derjenigen Beziehungen, welche für die in Betracht kommenden Grösssen gelten, ergeben sich hieraus leicht die Gleichungen

$$\text{I)} \qquad P = Q \frac{\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} x,$$

$$\text{II)} \quad P = Q \frac{b \sin\alpha + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\alpha} \tan\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\alpha}} = Q \frac{a \sin\beta + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2\beta} \tan\beta}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2\beta}},$$

$$\text{III)} \qquad P = Q (\tan\alpha + \tan\beta) = Q \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$$

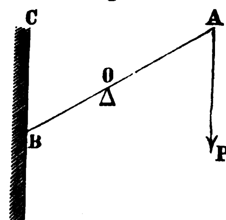
als Lösungen der gestellten Aufgabe.

Aufgabe 135. Gegen eine feste Wand *CB* (Fig. 22) stützt sich mit ihrem einen Ende *B* eine starre, gewichtslose Gerade (Stange) *AOB* von der Länge *a*, welche in einem Punkte *O* unterstützt ist und an ihrem anderen Ende *A* ein Gewicht *P* trägt. Man verlangt:

I. dass mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten diejenige Lage bestimmt werden soll, in welcher *AOB* im Gleichgewichte ist, wenn von der Reibung abgesehen wird,

II. dass durch Anwendung desselben Principes diejenigen Pressungen N_1 und N_2 gefunden werden sollen, welche der Stützpunkt *O*, bezüglich die Wand *CB*, im Gleichgewichtszustande auszuhalten haben.

Fig. 22.



Lösung. Auf *AOB* wirken 1) das Gewicht *P* vertical nach unten; 2) der Widerstand des Stützpunktes *O*, senkrecht gegen *AB*; 3) der Widerstand der Wand *CB*, senkrecht zu ihr selbst.

Bezeichnet man den verticalen Abstand des Punktes *A* von der Horizontalen durch *O* mit z, die Länge *OB* mit x, den wagrechten Abstand des Drehpunktes *O* von der Wand *CB* mit b und stellt die Bedingung auf, dass die algebraische Summe der virtuellen Momente gleich Null sein muss, wenn *B* längs *BC* sich verschiebt, zugleich aber *BA* um *O* sich dreht, so ergiebt sich, bei gehöriger Beachtung der zwischen a, b, x und z bestehenden Beziehungen, dass

$$x = \sqrt[3]{a b^2}$$

sein muss, wenn *AB* sich im Gleichgewichte befinden soll.

Wird ferner angenommen, die Stange verschiebe sich nach oben parallel zur Gleichgewichtslage und wird hierfür das genannte Princip benutzt, so folgt für den auf den Stützpunkt *O* ausgeübten Druck

$$N_1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\, P.$$

Geht man endlich davon aus, dass die Stange sich im Sinne *BA* verschiebe, so liefert die hierdurch gewonnene Gleichung

$$N_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}\; P$$

als diejenige Pressung, welche die senkrechte Wand im Gleichgewichtszustande erfährt.

Aufgabe 136. Wie Nr. 104, doch soll das daselbst Gesuchte durch Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten gefunden werden.

Lösung. Die Benutzung von drei Verrückungen (vergl. Lösung der vorigen Aufgabe) giebt Gleichungen, deren eine für x (siehe 104), deren zweite für N_1 und deren dritte für N_2 diejenigen Werthe liefert, welche früher auf anderem Wege erhalten worden sind.

Capitel VI.

Aufgaben über die Anziehung der Linien, Flächen und Körper.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Wenn die Anziehung proportional der Masse und irgend einer Function der Entfernung u vorausgesetzt wird, so üben zwei Punkte, welche die Massen m und m_1 haben, auf einander die Wirkung

$$kmm_1 F(u)$$

aus. Hat z. B. der eine der Punkte die Masse 1, der andere die Masse μ und wird die Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angenommen, so ist die Wirkung, welche der erste Punkt vom zweiten erleidet,

$$A = \frac{k\mu}{u^2}.$$

Der Anziehungscoefficient k bedeutet also diejenige Anziehung, welche die Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung 1 ausübt.

Liegt statt des einen Punktes ein Körper vor, so sind die Anziehungen, welche die einzelnen Massenelemente desselben auf irgend einen materiellen Punkt ausüben, von verschiedener Richtung, man muss sie daher passend in Componenten zerlegen, um sie summiren (integriren) zu können.

Dasselbe gilt, wenn die Anziehung von einer materiellen Fläche oder Linie ausgeübt wird.

Hiernach sind die Aufgaben dieses Capitels zu behandeln.

A. Anziehung der Linien.

Aufgabe 137. Eine materielle Gerade AB, von der Länge b, wirkt anziehend auf einen Punkt P, welcher in ihrer Richtung liegt. Der Querschnitt der Geraden ist constant $= q$; die Dichtig-

keit derselben ebenfalls constant und zwar $= \varepsilon$. Der angezogene Punkt hat die Masse 1 und befindet sich im Abstande $BP = a$ von dem Endpunkte B. Die Anziehung erfolgt nach dem Newton'schen Gesetze, also proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung; es soll ihre Grösse X ermittelt werden, wenn der Punkt P I. ausserhalb AB, II. im Endpunkte B, III. innerhalb AB liegt.

Lösung. I. Die Entfernung AQ eines allgemein zwischen A und B an der Stelle Q gelegenen Linienelementes möge mit x bezeichnet und die Richtung von A nach Q als die der positiven Abscissen aufgefasst werden. Dann ist die Anziehung, welche dieses Element auf P ausübt,

$$dX = -\frac{kq\varepsilon}{(a+b-x)^2}\,dx,$$

wobei k der Anziehungscoefficient und wobei das Vorzeichen (hier und im Folgenden) aussagt, dass die Attraction im Sinne QA erfolgt.

Die Wirkung, die von der ganzen Geraden ausgeübt wird, ergiebt sich hieraus zu

$$X = -\frac{kbq\varepsilon}{a(a+b)},$$

oder, wenn man die Masse der Linie mit m bezeichnet, zu

$$X = -\frac{km}{a(a+b)}.$$

Sie ist mithin eben so gross, als wenn die gesammte Masse in einem Punkte C vereinigt wäre, dessen Entfernung von P gleich dem geometrischen Mittel zu a und $a+b$, dessen Ort also leicht durch Construction gefunden werden kann.

Je länger die Gerade, desto mehr nähert sich die Anziehung dem Werthe

$$X = -\frac{kq\varepsilon}{a},$$

wächst also nicht ins Unendliche.

II. Liegt P im Endpunkte B, so ist

$$X = -\infty.$$

Der Anziehungsmittelpunkt C fällt mit B und P zusammen.

III. Wenn endlich P innerhalb AB liegt, so ergiebt sich ohne Rechnung, dass die Anziehung, welche P erleidet, derjenigen

gleich ist, die die Strecke $b-2a$ der Geraden nach I. ausübt. Ihr absoluter Werth ist mithin

$$X = \frac{k(b-2a)q\varepsilon}{a(b-a)},$$

oder, wenn die Masse des Stückes $b-2a$ mit μ bezeichnet wird,

$$X = \frac{k\mu}{a(b-a)}.$$

Aufgabe 138. Ein Punkt P (Fig. 23 auf Seite 128) von der Masse 1, wird durch eine materielle Gerade B_1B_2, die die Länge b, den constanten Querschnitt q und die ebenfalls constante Dichtigkeit ε besitzt, nach dem Newton'schen Gesetze angezogen. Derselbe befindet sich ausserhalb der Richtung der Geraden im senkrechten Abstande a so gelegen, dass das von ihm auf B_1B_2 gefällte Loth PO die Strecke B_1B_2 in die beiden Theile $OB_1 = b_1$ und $OB_2 = b_2$ zerlegt.

Es soll untersucht werden, I. welches die Grösse und Richtung der Anziehung R ist, die der Punkt P von der Geraden B_1B_2 erleidet; II. wo derjenige Punkt liegt, in welchem concentrirt die Masse der Geraden dieselbe Anziehung ausüben würde, wie wenn sie längs B_1B_2 vertheilt ist; III. wie er sich durch Construction auffinden lässt; IV. wie die Resultate dann lauten, wenn $b_1 = b_2$ ist.

Lösung. Nimmt man OP als die Achse der positiven x, OB_1 als die derselben y, so übt ein Linienelement, welches sich im Abstande y von O befindet, auf P die Anziehung

$$dR = -\frac{kq\varepsilon}{a^2+y^2}dy$$

aus; dies giebt parallel zur x-Achse eine Componente

$$dX_1 = -\frac{kaq\varepsilon}{\sqrt{a^2+y^2}^3}dy$$

und parallel zu der der y

$$dY_1 = \frac{kq\varepsilon y}{\sqrt{a^2+y^2}^3}dy.$$

Die Gesammtwirkung, welche von dem Theile OB_1 der Geraden in der Richtung der x hervorgebracht wird, ist mithin

$$X_1 = -\frac{kq\varepsilon}{a} \cdot \frac{b_1}{\sqrt{a^2+b_1^2}},$$

oder, wenn man PB_1 mit c_1 und die Masse von OB_1 mit m_1 bezeichnet,

$$X_1 = -\frac{km_1}{ac_1}.$$

Wird der Winkel $B_1PO = \beta_1$ gesetzt, so kann man auch

$$X_1 = -\frac{kq\varepsilon}{a} \sin\beta_1$$

schreiben.

Ebenso gilt natürlich für die Anziehung, welche OB_2 parallel zur x-Achse äussert,

$$X_2 = -\frac{kq\varepsilon}{a} \cdot \frac{b_2}{\sqrt{a^2+b_2^2}} = -\frac{km_2}{ac_2} = -\frac{kq\varepsilon}{a} \sin\beta_2,$$

worin die Bezeichnungen gewählt sind, wie vorher.

Ferner folgt für die gleich gerichtete Anziehungscomponente der ganzen Geraden B_1B_2

$$X = -\frac{kq\varepsilon}{a}\left(\frac{b_1}{\sqrt{a^2+b_1^2}} + \frac{b_2}{\sqrt{a^2+b_2^2}}\right)$$

$$= -\frac{k}{a}\left(\frac{m_1}{c_1} + \frac{m_2}{c_2}\right) = -\frac{kq\varepsilon}{a}(\sin\beta_1 + \sin\beta_2).$$

Desgleichen gelangt man, von der Gleichung für dY_1 ausgehend, zu den Werthen

$$Y_1 = kq\varepsilon\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b_1^2}}\right) = \frac{km_1}{b_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c_1}\right),$$

$$Y_2 = -kq\varepsilon\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b_2^2}}\right) = -\frac{km_2}{b_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c_2}\right),$$

$$Y = kq\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b_1^2}}\right) = \frac{km}{b}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right),$$

oder besser

$$Y = \frac{kq\varepsilon}{a}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1).$$

Mithin ist die Grösse der Gesammtanziehung

$$R = 2\frac{kq\varepsilon}{a} \sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}.$$

Die Richtung derselben wird durch den Winkel φ bestimmt, den R mit der x-Achse einschliesst; für denselben ergiebt sich leicht

$$\varphi = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}.$$

II. Der Punkt Q, in welchem die ganze Masse m vereinigt werden müsste, wenn sie auf P dieselbe Anziehung ausüben sollte, wie bei ihrer Vertheilung längs B_1B_2, muss in der Richtung von R liegen. Sein Abstand r von P folgt leicht zu

$$r = \sqrt{\frac{ab}{2} csc \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}.$$

III. Dieser Ausdruck würde als geometrisches Mittel zu a und $\frac{1}{2} b\, csc\, \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ darstellbar sein.

Er lässt jedoch eine für die Construction sehr brauchbare Umformung zu, wenn man beachtet, dass die Masse von $B_1 B_2$

$$m = aq\varepsilon\,(tan\,\beta_1 + tan\,\beta_2)$$

ist. Dann ergiebt sich

$$r^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{tan\,\beta_1 + tan\,\beta_2}{sin\,\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)},$$

$$r^2 = a^2 \frac{cos\,\beta_1 + cos\,\beta_2}{2\,cos\,\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)\,cos\,\beta_1\,cos\,\beta_2},$$

$$r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{cos\,\beta_1} + \frac{a}{cos\,\beta_2}\right) \frac{a}{cos\,\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)},$$

d. i. so viel wie

$$r = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\overline{PB_1} + \overline{PB_2})\,\overline{PC}},$$

wobei PB_1, PB_2 und PC selbstverständliche (aus der vorhergehenden Gleichung folgende) Bedeutungen haben.

Fig. 23.

Man erhält mithin r als geometrisches Mittel zu

$$\tfrac{1}{2}(\overline{PB_1} + \overline{PB_2})$$

und PC. Die Fig. 23, in welcher $\angle CPO = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)$, $PD = \frac{1}{2}(PB_1 + PB_2)$ und $PQ = PE$ ist, wird die Ausführung der Construction hinreichend angeben.

IV. Für $b_1 = b_2$ ergiebt sich

$$X = -\frac{km}{ac} = -\frac{kq\varepsilon}{a} sin\,\beta,$$

$$Y = 0,\ R = X,\ \varphi = 0,$$

worin $PB_1 = PB_2 = c$, $\angle OPB_1 = \angle OPB_2 = \beta$ genommen ist. Der Abstand des Punktes Q von P ist also dann die mittlere Proportionale zu a und c.

Aufgabe 139. Ueber dem Mittelpunkte einer materiellen Kreislinie, deren Radius a ist, deren Dichtigkeit ε und deren

Querschnitt q constant sind, liegt ein Punkt P in dem senkrecht zur Kreisebene gemessenen Abstande c. Seine Masse ist $= 1$. Er erleidet von der Kreislinie eine Anziehung A nach dem Newton-schen Gesetze. I. Wie gross ist dieselbe? II. Wo müsste die gesammte Masse der Linie in einem Punkte Q vereinigt sein, um dieselbe Wirkung auszuüben, wie bei ihrer Vertheilung längs derselben, und wie lässt sich der Ort dieses Punktes aus a und c construiren?

Lösung. I. Auf dieselbe Weise, wie in den Lösungen der beiden vorigen Aufgaben findet man

$$A = 2\pi \frac{akcq\varepsilon}{\sqrt{a^2+c^2}^3},$$

oder, wenn mit m die Masse der Kreislinie bezeichnet wird, und mit b der Abstand des angezogenen Punktes von der Peripherie,

$$A = \frac{kcm}{b^3}.$$

II. Der gesuchte Punkt Q liegt auf der Geraden, welche P mit dem Kreismittelpunkte verbindet, in der Entfernung

$$r = b\sqrt{\frac{b}{c}}$$

von P.

III. Dies kann als geometrisches Mittel zu b und $\frac{b^2}{c}$ construirt werden.

Aufgabe 140. Die homogene, gleichdicke materielle Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

wirkt anziehend auf einen Punkt, der sich im Coordinatenanfange befindet und die Masse 1 hat. Ihr Querschnitt ist q, ihre Dichtigkeit ε. Die Anziehung erfolgt proportional der Masse und der Entfernung. Wie gross ist dieselbe und wie lässt sie sich durch die Ordinate des Schwerpunktes ausdrücken?

Lösung. Da die Kettenlinie symmetrisch gegen die y-Achse liegt, so heben sich die parallel zur x-Achse wirkenden Componenten auf. Als Anziehung in der Richtung der positiven y ergiebt sich zunächst

$$Y = \tfrac{1}{2}\varkappa k q \varepsilon \left[\frac{k}{2}\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + 2x\right],$$

worin $\varkappa$ den Anziehungscoefficienten bedeutet. Wird der von 0 bis x gerechnete Kettenlinienbogen mit s bezeichnet, so lässt sich dies eleganter in der Form

$$Y = \varkappa q \varepsilon (sy + kx)$$

darstellen.

Da ferner, nach Lösung der Aufgabe 55, die Schwerpunktsordinate η den Werth $\frac{sy + kx}{2s}$ hat, so ist auch

$$Y = 2\varkappa q \varepsilon s \eta,$$

oder, wenn die Masse der Kettenlinie m genannt wird,

$$Y = \varkappa m \eta.$$

B. Anziehung der Flächen.

Aufgabe 141. Wie gross ist die Anziehung A, welche eine homogene, materielle Kreisfläche vom Radius a, der Dichtigkeit ε und der constanten Dicke δ, nach dem Newton'schen Gesetze auf einen Punkt von der Masse 1 ausübt, der senkrecht über ihrem Mittelpunkte in der Entfernung c liegt? Wie viel beträgt diese Anziehung, wenn c zu Null wird; wie viel, wenn eine unendlich grosse Kreisfläche vorliegt?

Lösung. Wird ein Kreisdurchmesser als Achse, der Mittelpunkt als Pol eines Polarcoordinatensystems genommen, der Radiusvector irgend eines Flächenpunktes mit r, die zugehörige Anomalie mit θ bezeichnet, so ist die Anziehung, welche das daselbst liegende Flächenelement ausübt,

$$dR = \frac{k\varepsilon\delta r\, d\theta\, dr}{c^2 + r^2}.$$

Dieselbe giebt in der Ebene der Scheibe eine Componente, welche aufgehoben wird; senkrecht zur Scheibe eine andere

$$dA = \frac{kc\delta\varepsilon r\, d\theta\, dr}{\sqrt{c^2 + r^2}^3}.$$

Hieraus folgt

$$A = 2\pi k c \delta \varepsilon \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right),$$

oder, wenn man den Abstand des angezogenen Punktes vom Rande der Scheibe mit b bezeichnet,

$$A = 2\pi k c \delta \varepsilon \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

Verschwindet c, so geht A über in

$$A_1 = 2\pi k \delta \varepsilon.$$

Derselbe Werth ergiebt sich für $a = \infty$; die Anziehung, welche eine mit unendlichem Halbmesser construirte Kreisfläche ausübt, ist also von endlicher Grösse.

Dem Anfänger sei empfohlen, die Lösung auch durch Benutzung des unter Nr. 139 erlangten Resultates zu liefern (also mittelst einfacher Integration).

Aufgabe 142. Die homogene, materielle Fläche ACB (Fig. 18 auf Seite 98) der Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

zieht einen im Coordinatenanfange befindlichen Punkt von der Masse 1 proportional der Entfernung und der Masse an. Die Dichtigkeit ist $= \varepsilon$, die Dicke der Fläche constant $= \delta$.

Man soll die Grösse der Anziehung bestimmen und angeben, wie sich dieselbe durch die Ordinate η des Flächenschwerpunktes ausdrücken lässt.

Lösung. Die parallel zur x-Achse wirkenden Componenten heben sich auf. Für die Anziehung in der Richtung der y-Achse ergiebt sich

$$Y = \tfrac{1}{8}\varkappa \varepsilon \delta \left[8ab^2 - 4ak^2 - k^3\left(e^{2\frac{a}{k}} - e^{-2\frac{a}{k}}\right)\right],$$

worin $\varkappa$ dieselbe Bedeutung hat, wie bei Nr. 140, a und b aber unter Nr. 110 genannt sind.

Wird mit s die Länge des Bogens $AC = CB$ bezeichnet, so hat man besser

$$Y = \tfrac{1}{2}\varkappa \varepsilon \delta \left[2ab^2 - k(ak + bs)\right].$$

Da die Ordinate η des Schwerpunktes der Fläche ACB den Werth

$$\eta = \frac{2ab^2 - k(bs + ak)}{4(ab - ks)}$$

hat, was leicht aus dem unter II. in Aufgabe 65 Dagewesenen folgt, so ist auch

$$Y = 2\varkappa \delta \varepsilon (ab - ks)\eta,$$

oder, wenn man die Masse der Fläche ACB mit m bezeichnet,

$$Y = \varkappa m \eta.$$

Aufgabe 143. Eine materielle Kugelfläche vom Radius a, deren Dichtigkeit ε und Dicke δ constant sind, wirkt anziehend auf einen Punkt P von der Masse 1, welcher sich im Abstande $c > a$ vom Mittelpunkte O befindet. Die Anziehung erfolgt proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Es wird verlangt, die Intensität derselben zu ermitteln.

Lösung. Wir beziehen die Kugelfläche und den Punkt P auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen positive x-Achse OP und dessen Anfang O ist. Dann ergiebt sich für die Anziehung, welche die ganze Kugelfläche auf P ausübt, zunächst der Ausdruck

$$X = -2ak\delta\varepsilon \int_{-a}^{+a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{(c-x)\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{a^2+c^2-2cx}^3},$$

worin k, wie früher, der Anziehungscoefficient.

Durch Ausführung der Integrationen folgt hieraus

$$X = -\frac{k(4\pi a^2\delta\varepsilon)}{c^2},$$

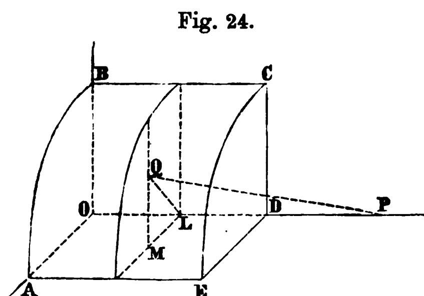
die Anziehung ist also eben so gross, als wenn die gesammte Masse der Kugelfläche in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Dasselbe ergiebt sich bei Anwendung von räumlichen Polarcoordinaten.

C. Anziehung der Körper.

Aufgabe 144. Ein Punkt P, welcher auf der Achse eines homogenen, geraden Kreiscylinders liegt, wird von diesem proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angezogen. Der Radius OB des Cylinders ist $= c$, die Höhe $OD = h$, die Dichtigkeit ε, der Abstand des Punktes P von der Cylinderbasis $= a$, seine Masse $= 1$. Gefragt wird nach der Grösse der Anziehung, I. wenn der angezogene Punkt

Fig. 24.



oberhalb der Deckfläche, II. wenn er in derselben liegt, III. wenn er sich innerhalb der Cylindermasse befindet. Ferner wird IV. die Beantwortung der unter I. und II. gestellten Fragen für den Fall eines unendlich langen Cylinders verlangt. Endlich soll V. berechnet werden, wo derjenige Punkt der Achse liegt, in welchem concentrirt die Cylindermasse dieselbe Wirkung ausüben würde, welche sie in den Fällen I. bis IV. erzeugt; auch soll man eine Construction zur Auffindung dieses Punktes angeben.

Lösung. I. Benutzt man cylindrische Coordinaten in der durch Fig. 24 angedeuteten Weise, indem man einen beliebigen Massenpunkt Q durch $OL = x$, $LQ = r$ und $\angle MLQ = \omega$ bestimmt, so ergiebt sich für die Anziehung, welche P erleidet,

$$A = -k\varepsilon \int_0^h \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{(a-x)\, r\, dx\, dr\, d\omega}{\sqrt{(a-x)^2 + r^2}^{\,3}}.*$$

Dies liefert

1) $A = -2\pi k\varepsilon\left(h + \sqrt{(a-h)^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right), \quad a \geqq h,$

was so viel ist, wie

$$A = -2\pi k\varepsilon\left(\overline{BC} + \overline{CP} - \overline{BP}\right) = -2\pi k\varepsilon s,$$

wenn man unter s versteht: Cylinderhöhe plus Abstand des angezogenen Punktes vom Umfange der Deckfläche, minus Entfernung desselben von der Peripherie der Basis.

II. Liegt der angezogene Punkt auf der Deckfläche, so hat die Anziehung die Grösse

2) $A = -2\pi k\varepsilon\left(h + c - \sqrt{h^2 + c^2}\right) = -2\pi k\varepsilon s.$

III. Befindet er sich innerhalb der Cylindermasse und wird der Abstand von der Grundfläche mit h_1, der von der Deckfläche mit h_2 bezeichnet, so ist

3) $A = 2\pi k\varepsilon\left(h_2 - h_1 - \sqrt{h_2^2 + c^2} + \sqrt{h_1^2 + c^2}\right) = -2\pi k\varepsilon s,$

wobei s hier in Bezug auf den Restcylinder von der Höhe $h_1 - h_2$ verstanden werden muss.

IV. Für $h = \infty$ liefert die Gleichung 1), wenn man erst $a = h + a_1$ setzt und dann den binomischen Satz anwendet,

4) $A = -2\pi k\varepsilon\left(\sqrt{a_1^2 + c^2} - a_1\right).$

---

* Es möge beachtet werden, dass Nr. 144 auch gelöst werden kann, indem man den unter 141 gefundenen Satz von der Anziehung der Kreisscheibe als bekannt voraussetzt. Diese Bemerkung sei für die folgenden Aufgaben ebenfalls zur Berücksichtigung empfohlen.

Ebenso erhält man aus 2)

5) $$A = -2\pi k \varepsilon c.$$

Die Anziehung, welche ein unendlich langer Cylinder ausübt, ist also von endlicher Grösse.

V. Derjenige Punkt der Achse, in welchem concentrirt die Cylindermasse dieselbe Wirkung hervorbringt, wie bei ihrer Vertheilung, liegt für die Fälle I. bis III. von dem angezogenen Punkte, nach O zu, im Abstande

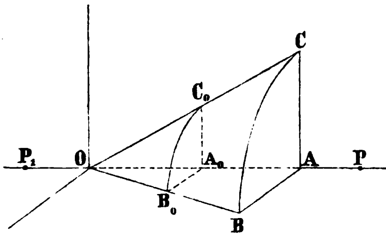
$$\xi = \sqrt{\frac{c^2 h}{2s}}.$$

Dies kann construirt werden, indem man zu $2s$, c und c die vierte Proportionale bestimmt, dann aber zu dieser und h das geometrische Mittel aufsucht.

Im Falle IV. ist ξ unendlich gross.

Aufgabe 145. I. Wie gross ist die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgende Anziehung, welche ein gerader, homogener Kreiskegel von der Höhe $OA = h$, dem Basisradius b und der Dichtigkeit ε auf einen Punkt P von der Masse 1 ausübt, der auf seiner Achse, unterhalb der Grundfläche, in der Entfernung $a > h$ von der Spitze liegt?

Fig. 25.



II. Welchen Werth hat dieselbe, wenn der angezogene Punkt sich im Basismittelpunkte befindet?

Lösung. I. Wird die Kegelspitze als Anfang der Abscissen, die Kegelachse OA als positive x-Achse genommen und der allgemeine Punkt der Kegelmasse, wie in der Lösung der vorigen Aufgabe, durch die Coordinaten x, r und ω bestimmt, so hat man für die Gesammtanziehung, welche auf P ausgeübt wird,

$$A = -k\varepsilon \int_0^h \int_0^{\frac{bx}{h}} \int_0^{2\pi} \frac{r(a-x)\,dx\,dr\,d\omega}{\sqrt{(a-x)^2 + r^2}^3}.$$

Unter Anwendung bekannter Integralformeln folgt hieraus

1) $$A = 2\pi k \varepsilon h \left\{ \frac{h}{s^2} \left[\frac{ab^2}{hs} l \frac{s^2 - ah + cs}{a(s-h)} - c + a \right] - 1 \right\},$$

worin s die Länge der Kegelseite, c den Abstand des angezogenen Punktes von der Peripherie der Basis und k, wie gewöhnlich, den Anziehungscoefficienten bedeutet.

II. Wenn P mit dem Grundflächenmittelpunkte zusammenfällt, so ist einfacher

2) $$A = 2\pi k \varepsilon h \left\{ \frac{h}{s^2} \left[\frac{b^2}{s} l \frac{b(b+s)}{h(s-h)} - b + h \right] - 1 \right\}.$$

Aufgabe 146. Wie Nr. 145, I; doch liegt der angezogene Punkt P_1 oberhalb der Kegelspitze in der Entfernung a von der Grundfläche (siehe Fig. 25).

Das für die Anziehung gefundene Resultat soll auf denjenigen besonderen Fall angewendet werden, in welchem P_1 mit der Spitze zusammenfällt.

Lösung. Auf dieselbe Weise, wie bei der Behandlung der vorhergehenden Aufgabe, gelangt man hier zu dem Werthe

1) $$A = 2\pi k \varepsilon h \left\{ 1 - \frac{h}{s^2} \left[\frac{b^2 d}{hs} l \frac{b^2 + ah + cs}{(h+s)d} + c - d \right] \right\},$$

in welchem d die Entfernung des angezogenen Punktes von der Kegelspitze ist, die übrigen Grössen aber dieselbe Bedeutung haben wie vorher.

Für den in der Aufgabe genannten speciellen Fall liefert die Gleichung 1) zunächst Unbestimmtes, bei näherer Untersuchung aber

$$A = 2\pi k \varepsilon h \left\{ 1 - \frac{h}{s} \right\}.$$

Aufgabe 147. Ganz wie Nr. 145, nur mit dem Unterschiede, dass der anziehende Kegel ein abgestumpfter ist, welcher aus dem Vollkegel mit der Höhe h entstand, indem man eine Spitze von der Höhe $OA_0 = h_0$ parallel zur Basis abtrennte (Fig. 25).

Lösung. Legt man das Coordinatensystem wieder genau so, wie in der Lösung der Aufgabe 145 angegeben worden ist und benutzt die Abkürzungen

$$b^2 + h^2 = s^2,$$
$$(a-h)^2 + b^2 = c^2,$$
$$(a - h_0)^2 h^2 + b^2 h_0^2 = p^2,$$

so ergiebt sich

$$A = 2\pi k \varepsilon \left\{ h_0 - h + \frac{h}{s^2} \left[\frac{ab^2}{s} l \frac{h(s^2 - ah + cs)}{h_0 s^2 - ah^2 + ps} - ch + p \right] \right\}$$

als Werth der gesuchten Anziehung. Geht der Stumpf in einen Vollkegel über, so wird hieraus die unter Nr. 145 angegebene Gleichung 1).

Aufgabe 148. Wie Nr. 146, doch ist der anziehende Kegel der abgestumpfte $ABCA_0B_0C_0$ (Fig. 25 auf Seite 134), für welchen $OA_0 = h_0$ und OA, wie früher, $= h$. Man verlangt I. die Anziehung A, die auf P_1 ausgeübt wird; II. die Grösse derselben für den Fall, dass der angezogene Punkt P_1 mit dem Mittelpunkte A_0 der Deckfläche zusammenfällt; III. die Herleitung der Anziehung für den Vollkegel und für den Cylinder, aus den unter I. gefundenen Resultaten.

Lösung. I. In der bei Behandlung der vorhergehenden Aufgaben angegebenen Weise findet man

1) $$A = 2\pi k \varepsilon \left\{ h - h_0 - \frac{h}{s^2} \left[\frac{(a-h)b^2}{s} l \frac{h(ah + b^2 + cs)}{(a-h)h^2 + h_0 s^2 + ps} + ch - p \right] \right\},$$

worin zur Abkürzung

$$b^2 + h^2 = s^2,$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

und

$$(a - h + h_0)^2 h^2 + b^2 h_0^2 = p^2$$

gesetzt ist.

II. Liegt der angezogene Punkt P_1 im Deckflächenmittelpunkte, so ergiebt sich die Grösse der Anziehung aus Gleichung 1), wenn man $a = h - h_0$ nimmt.

III. Die für den Vollkegel von der Höhe h geltende Formel folgt, wenn $h_0 = 0$ gesetzt wird. Man gelangt dann zu dem unter Nr. 146 angeführten Resultate.

Um ferner den Werth für die Anziehung des Cylinders aus Gleichung 1) zu erhalten, braucht man nur h, h_0 und a durch die Höhe h_1 des Stumpfes, durch den Abstand $P_1A_0 = \alpha$ (Fig. 25) und durch den Deckflächenradius $A_0B_0 = \beta$ auszudrücken und nachher $\beta = b$ zu nehmen. Es ergiebt sich dann die Gleichung 1) der Lösung von Nr. 144.

Aufgabe 149. Eine homogene Hohlkugel, deren äusserer Radius r_1, deren innerer r_0 und deren Dichtigkeit ε ist, wirkt nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf einen Punkt P von

der Masse 1. Es soll berechnet werden, I. wie gross diese Anziehung A ist, wenn der Punkt ausserhalb der Kugel liegt; II. wenn er sich in dem umschlossenen Hohlraume befindet; III. wenn er innerhalb der Kugelmasse gelegen ist. Endlich soll man IV. angeben, wie stark anziehend eine massive Kugel auf den Punkt P wirkt, wenn dieser ausserhalb, innerhalb, oder auf der Oberfläche sich befindet.

Lösung. I. Unter Benutzung eines Polarcoordinatensystems, dessen Pol der Kugelmittelpunkt ist, findet man leicht

$$A = -\tfrac{4}{3} \cdot \frac{\pi k \varepsilon}{a^2}(r_1{}^3 - r_0{}^3) = -\frac{km}{a^2},$$

worin a den Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte, m die Masse der Hohlkugel und k den Anziehungscoefficienten bedeutet.

Die Anziehung ist daher eben so gross, als sie sein würde, wenn die ganze Masse der Hohlkugel in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre.

II. Ein in dem umschlossenen Hohlraume liegender Punkt erleidet gar keine Attraction.

III. Befindet sich der Punkt innerhalb der Masse der Hohlkugel im Abstande $a < r_1$ (aber $> r_0$) vom Mittelpunkte, so wird er derartig angezogen, als ob nur diejenige Hohlkugel auf ihn wirke, deren äusserer Radius a, deren innerer r_0 ist.

IV. Ist die Kugel massiv, wird ihr Halbmesser mit R, der Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte wieder mit a bezeichnet, so ergeben sich für die Anziehungen leicht die Werthe

1) $$A = -\tfrac{4}{3}\pi k \varepsilon \frac{R^3}{a^2},$$

2) $$A = -\tfrac{4}{3}\pi k \varepsilon a,$$

3) $$A = -\tfrac{4}{3}\pi k \varepsilon R,$$

je nachdem der Punkt ausserhalb der Kugel, innerhalb, oder auf der Oberfläche liegt. Die hierin enthaltenen Sätze sind leicht in Worte zu fassen.

Aufgabe 150. An einer Wage sind zwei Kräfte im Gleichgewichte, von denen die eine (ein Gewicht, dessen Masse μ ist) von der Anziehung der Erde abhängt, die andere (etwa die Elasticität einer Feder) aber nicht.

Man bringt diese Wage über ein homogenes Erzlager, dessen Dichtigkeit E ist und welches in der Form eines Kreiscylinders vom Radius r und der Höhe (Tiefe) h so in der oberen Schicht der Erde liegt, dass der Mittelpunkt der Cylinderdeckfläche mit dem Mittelpunkte von μ zusammenfällt.

Es soll I. ermittelt werden, wie sich die Anziehung A', die das Gewicht dann erleidet, zu derjenigen, A, verhält, welche es erleiden würde, wenn kein Erzlager vorhanden wäre, vielmehr die ganze Erde (die als vollkommene Kugel vom Radius R angesehen werden möge) die gleichförmige Dichtigkeit ε hätte; II. soll bestimmt werden, wie gross das Verhältniss $\frac{A'}{A}$ für den Fall ist, dass E die Dichtigkeit des Quecksilbers $= 14$, $r =$ zwei Kilometer, $h = 25$ Meter und dass $R = 6370$ Kilometer, ε aber gleich 5,6 angenommen wird.

Lösung. Die Anziehung der gleichförmig dichten Erde auf die Masse μ an ihrer Oberfläche ist (laut Lösung der vorigen Aufgabe)

$$A = \tfrac{4}{3}\pi k \mu \varepsilon R.$$

Denkt man sich nun den oben angegebenen Cylinder herausgenommen und den entstandenen Hohlraum mit der dichteren Erzmasse ausgefüllt, so hat man für die neue Anziehung (siehe Lösung der Aufgabe 144)

$$A' = \tfrac{4}{3}\pi k \mu \varepsilon R + 2\pi k \mu \left(h + r - \sqrt{h^2 + r^2}\right)(E - \varepsilon);$$

mithin ist

$$\frac{A'}{A} = 1 + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{E - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{h + r - \sqrt{h^2 + r^2}}{R}.$$

II. Für die in der Aufgabe vorgeschriebenen Zahlenwerthe folgt hieraus, abgerundet,

$$\frac{A'}{A} = 1 + \frac{1}{114000},$$

d. h. das Uebergewicht beträgt so viel, als wäre die in der einen Wagschale liegende Masse μ um $\frac{1}{114000}$ vermehrt worden.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN MECHANIK.

EIN ÜBUNGSBUCH

FÜR

STUDIERENDE DER MATHEMATIK, PHYSIK, TECHNIK ETC.

VON

DR. ARWED FUHRMANN,

ORDENTL. PROFESSOR AM KÖNIGLICHEN POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

IN ZWEI TEILEN.

ZWEITER TEIL:

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN DYNAMIK FESTER KÖRPER.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

ZWEITE, VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Vorrede zur zweiten Auflage des zweiten Teiles.

In dem vorliegenden zweiten Teile meiner „Aufgaben aus der analytischen Mechanik" ist immer, wo nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt wird, y' die Abkürzung für $\frac{dy}{dx}$, ebenso r' die für $\frac{dr}{d\theta}$, q ein konstanter Querschnitt, ε die unveränderliche Dichtigkeit, δ die konstante Dicke einer Fläche, t die vom Anfange der Bewegung aus gezählte Zeit, θ (im fünften Capitel) der von der Anfangslage aus gerechnete Drehwinkel, M die Masse. Letztere wurde jedoch bei den in den ersten drei Capiteln enthaltenen Aufgaben stets gleich 1 vorausgesetzt. —

Bezüglich der Bestimmung des Buches verweise ich auf die der zweiten Auflage des ersten Teiles beigegebene Vorrede, sowie auf die günstigen Recensionen, welche im „Literarischen Centralblatt", im „Archiv für Mathematik und Physik", in der „Allgemeinen Literaturzeitung", in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik", in derjenigen „für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", im „Civilingenieur", in den Organen des „Östreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins", des „Vereins deutscher Ingenieure" und in einigen anderen hervorragenden Blättern erschienen sind.

Auf Grund jener Urteile und derjenigen, welche mir brieflich zugegangen sind, darf ich hoffen, es werde sich die vorliegende Schrift nicht nur als Hilfsmittel beim Studium der Mechanik, sondern auch als solches bei dem der Differential- und Integralrechnung mehr und mehr einbürgern.

Dresden, am 21. November 1881.

A. Fuhrmann.

Inhaltsverzeichnis.

Capitel I.

Aufgaben über die geradlinige Bewegung eines freien Punktes.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Bezeichnet v die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes, s den von ihm zurückgelegten geradlinigen Weg, der von irgend einer bestimmten Anfangsstelle ab gerechnet wird, ist ferner Q die auf die Masseneinheit des Punktes wirkende Kraft, endlich t die von einem bestimmten Augenblicke an gezählte Zeit, so gelten bekanntlich die Beziehungen

1) $$v = \frac{ds}{dt}$$

und

2) $$Q = \frac{dv}{dt}.$$

Die Letzte derselben läſst sich auch in den Formen

3) $$Q = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

und

4) $$Q = v\frac{dv}{ds}$$

darstellen.

Hierbei gilt Q für positiv, wenn es die Geschwindigkeit v zu vergrössern strebt; im entgegengesetzten Falle für negativ.

Hat der sich bewegende Punkt nicht die Masse 1, sondern die Masse m, so ist die Kraft, welche die Geschwindigkeit v erzeugt, gleich $m\frac{dv}{dt}$. Sie wird bewegende Kraft genannt, während die auf die Masseneinheit wirkende beschleunigende Kraft heiſst.

A. Gegeben eine Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft Q und der Zeit t; einschliefslich: Q konstant.

Aufgabe 1. Ein Punkt bewegt sich infolge der Einwirkung einer Kraft, welche proportional der Zeit zunimmt und zur Zeit 1 die Beschleunigung k erteilt (also z. B. infolge des Gewichtes einer Wassermenge, die sich durch Zuflufs gleichmäfsig vermehrt). Die Bewegung beginnt mit der Anfangsgeschwindigkeit c und erfolgt in einem nicht widerstehenden Mittel.

Wie grofs sind nach der Zeit t die Geschwindigkeit v und der zurückgelegte Weg s?

Lösung. Die Gleichungen 1) und 2) der vorstehenden „Zusammenstellung" liefern

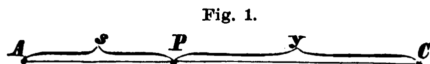
$$v = c + \tfrac{1}{2} k t^2$$

und

$$s = ct + \tfrac{1}{6} k t^3.$$

Aufgabe 2. In einem widerstehenden Mittel bewegt sich zur Zeit Null von der Stelle A (Fig. 1) aus ohne Anfangsgeschwindigkeit ein Punkt infolge einer Anziehung nach einem festen Centrum C, welches im Abstande $AC = a$ sich befindet. Die auf ihn wirkende beschleunigende Kraft einschliefslich des Mittelwiderstandes) ist zu jeder Zeit t

Fig. 1.



$$1)\qquad Q = a\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta}\, e^{-\alpha t}(\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t),$$

wobei a, α und β konstante Gröfsen sind.

Es soll ermittelt werden:

I. wie grofs die Geschwindigkeit v des Punktes zur Zeit t ist;

II. in welcher Entfernung y er sich zu dieser Zeit vom Centrum C befindet;

III. ob seine Bewegung identisch ist mit einer solchen, welche entsteht, wenn das Centrum C proportional der Entfernung anzieht und das Mittel proportional der Geschwindigkeit widersteht, oder, was dasselbe ist, wenn er sich in einer central durchbohrten Kugel in jenem Mittel bewegt.

Lösung. Man findet

$$2)\qquad v = a\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta}\,e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

und

$$3)\qquad y = \frac{\alpha}{\beta}\,e^{-\alpha t}(\alpha \sin\beta t + \beta\cos\beta t).$$

Nun gilt aber, wenn der Punkt sich in einer central durchbohrten Kugel bei obigem Widerstande bewegt, für die beschleunigende Kraft die Gleichung (siehe Lösung der Aufgabe 149 des ersten Teiles dieses Buches)

$$Q = ky - k_1 v,$$

in welcher k und k_1 Konstanten sind. Da 1) unter Beachtung von 2) und 3) leicht auf die Form

$$Q = (\alpha^2 + \beta^2)y - 2\alpha v$$

gebracht werden kann, so erhellt, dafs die in der Aufgabe vorgeschriebene Bewegung wirklich mit der in einer durchbohrten Kugel identisch ist und zwar mit derjenigen, bei welcher k und k_1 die Werte $\alpha^2 + \beta^2$, bezüglich 2α, haben.

Aufgabe 3. Es soll mittelst der Gleichungen 1) bis 4) der vorstehenden „Zusammenstellung" der im luftleeren Raume senkrecht nach unten erfolgende Wurf untersucht werden und zwar unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Schwere.

Lösung. Wird die Anfangsgeschwindigkeit mit c bezeichnet und die Zeit t vom Beginne der Bewegung an gezählt, so liefern die genannten Differentialgleichungen

$$v = c + gt$$

für die erlangte Geschwindigkeit,

$$s = ct + \tfrac{1}{2}gt^2$$

für den durchflogenen Weg und, wenn c gleich Null ist,

$$v = \sqrt{2gs}.$$

Diese sehr bekannten Resultate werden für später folgende Aufgaben wieder gebraucht.

Aufgabe 4. Wie Nr. 3, doch erfolgt der Wurf vertikal aufwärts.

Lösung. Hier ergiebt sich

$$v = c - gt,$$
$$s = ct - \tfrac{1}{2} gt^2,$$
$$s = \frac{c^2 - v^2}{2g}.$$

Man sieht hieraus, dafs in dem Augenblicke $T = \frac{c}{g}$ der aufwärts geworfene Körper die Geschwindigkeit Null besitzt und das Herabfallen anfängt; ferner, dafs die erstiegene Höhe $S = \frac{c^2}{2g}$ ist, also (nach der Lösung der vorigen Aufgabe) eben so grofs, wie diejenige, aus welcher er herabfallen müfste, um seine Anfangsgeschwindigkeit c zu erlangen.

Die beim Aufsteigen vorliegenden Geschwindigkeiten sind den entsprechenden beim darauf folgenden Herabfallen überall gleich.

Aufgabe 5. Das Abwärtsrollen auf der schiefen Ebene (ohne Anfangsgeschwindigkeit und ohne Widerstände) soll untersucht werden.

Lösung. Es ist, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen die Ebene mit dem Horizonte bildet,

$$v = gt \sin \alpha$$

und

$$s = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin \alpha.$$

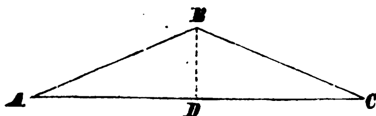
Die Geschwindigkeit, welche der Punkt erlangt, indem er die ganze Länge L der schiefen Ebene herabrollt, ist hiernach gleich $\sqrt{2gL \sin \alpha}$, mithin eben so grofs, wie diejenige, die er erwerben würde, wenn er ihre ganze Höhe vertikal herabfiele.

Aufgabe 6. Ein Dach ABC (Fig. 2), von gegebener Spannweite $2b$, soll so konstruiert werden, dafs das Regenwasser in der kürzesten Zeit herabfliefst. Unter welchem Winkel

$$\alpha = BAD$$

müssen die Sparren gegen den Horizont geneigt werden?

Fig. 2.



Lösung. Mit Benutzung der Lösung der vorigen Aufgabe findet man leicht, dass α gleich 45 Grad sein mufs.

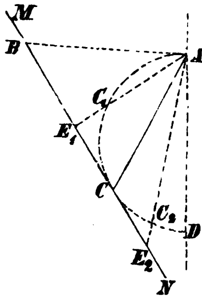
Aufgabe 7. Von dem obersten Punkte A eines vertikalen Kreisdurchmessers AB ist eine Sehne AC nach einem beliebigen Peripheriepunkte gezogen; von hier aus eine zweite nach dem untersten Punkte B.

Es soll berechnet werden, in welchem Verhältnisse die Zeiten t_1, t_2 und t_3 zu einander stehen, in denen AC, CB und AB von einem schweren Punkte durchlaufen werden.

Lösung. Man findet leicht, $t_1 = t_2 = t_3$. Es wird also jede der Sehnen in derselben Zeit durchlaufen, wie der Durchmesser.

Aufgabe 8. Mit einer gegebenen Rinne MN (Fig. 3) soll ein vorgeschriebener Punkt A durch eine andere Rinne AC so verbunden werden, dafs ein in der letzteren ohne Widerstand herabrollender schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von A nach MN gelangt. Die Lage der Rinne AC ist mit Benutzung der Lösung der vorigen Aufgabe zu bestimmen.

Fig. 3.



Lösung. Die Stelle C, an welcher die Rinne AC einmünden mufs, ergiebt sich, indem man AB horizontal zieht und $BC = BA$ nimmt. Dafs AC dann wirklich in der kürzesten Zeit durchrollt wird, erkennt man leicht, wenn man beachtet, dafs alle von A aus gezogenen Sehnen des in C die Rinne MN berührenden Halbkreises AC_1CC_2D in gleich langen Zeiten durchfallen werden, wie die Lösung der vorigen Aufgabe lehrt.

Aufgabe 9. Bei der ohne Geschwindigkeit beginnenden Bewegung eines Punktes hängt die vom Anfange an gezählte Zeit t mit der beschleunigenden Kraft Q zusammen durch die Gleichung

$$t = \frac{1}{k} \arccos \frac{Q}{ak^2},$$

in welcher a und k Konstanten sind.

Es soll berechnet werden, wie grofs die Geschwindigkeit v des Punktes in dem Augenblicke t ist; welchen Weg s er bis zu diesem Momente durchlaufen hat; wie die beschleunigende Kraft mit diesem Wege zusammenhängt und ob die Bewegung ebenso erfolgt, wie

wenn der Punkt in der centralen Bohrung einer homogenen Kugel vom Radius a nur infolge der Anziehung derselben sich bewegt und zwar von der Oberfläche aus, zur Zeit Null, ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Lösung. Die Gleichungen 1) und 2) der auf Seite 1 stehenden „Zusammenstellung" liefern

$$v = ak \sin kt,$$
$$s = a(1 - \cos kt) = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2} kt.$$

Hiernach ist

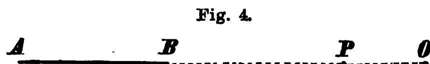
$$Q = k^2(a - s).$$

Wirkt auf den Punkt nichts weiter als die Anziehung der in der Aufgabe genannten Kugel, so unterliegt er in der Entfernung s von der Oberfläche (nach Lösung der Aufgabe 149 des ersten Teiles dieses Buches) der beschleunigenden Kraft $K^2(a - s)$. Wenn also die Konstanten K und k gleich sind, so sind es auch die beiden Bewegungen.

B. Gegeben eine Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft Q und dem durchlaufenen Wege s.

Aufgabe 10. Eine materielle Gerade AB (Fig. 4) von der endlichen Länge b wirkt anziehend auf einen Punkt P, welcher in ihrer Richtung liegt, aber aufserhalb ihrer Masse. Der Querschnitt der Geraden ist konstant gleich q; die Dichtigkeit derselben ebenfalls konstant und zwar gleich ε.

Fig. 4.



Der angezogene Punkt befindet sich zur Zeit Null von dem Endpunkte B in dem endlichen Abstande $BO = a$. Die Anziehung erfolgt nach dem Newton'schen Gesetze, also proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Die Bewegung beginnt von O aus ohne Anfangsgeschwindigkeit und geht unter alleiniger Wirkung der Anziehung der Geraden vor sich. Man soll berechnen, welche Geschwindigkeit v der Punkt erlangt hat nach Durchlaufung des Weges s; mit welcher (v_1) er im Halbierungspunkte der Strecke BO und mit welcher (v_2) er in B anlangt.

Lösung. Wenn sich der Punkt im Abstande y von B befindet,

so ist (nach der Lösung der Aufgabe 137 des ersten Teiles) die Anziehung, welche die Gerade auf ihn ausübt,

$$A = \frac{kbq\varepsilon}{y(b+y)}.$$

Hieraus folgt durch Benutzung der Gleichung 4) der „Zusammenstellung“ (Seite 1), dafs in dieser Entfernung die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2c}{b} l \frac{a(b+y)}{(a+b)y}}$$

vorliegen mufs, in welchem Ausdrucke c die Abkürzung für $kbq\varepsilon$ ist. Die, mit welcher er in der Mitte von OB anlangt, ist hiernach

$$v_1 = \sqrt{\frac{2c}{b} l \frac{a+2b}{a+b}},$$

und diejenige, mit der er in B ankommt, ist unendlich grofs.

Aufgabe 11. Wie Nr. 10, doch soll sich die anziehende Gerade (Fig. 4) von B nach A zu in's Unendliche erstrecken.

Lösung. Im Abstande y von B ist die Anziehung, welche der Punkt erleidet,

$$A = \frac{c}{y},$$

wobei $c = kq\varepsilon$.

Dies giebt für die Geschwindigkeit daselbst

$$v = \sqrt{2cl\frac{a}{y}}.$$

Sie nimmt also stets zu, erreicht im Halbierungspunkte der Strecke BO den Wert

$$v_1 = \sqrt{2cl2}$$

und ist unendlich grofs, wenn der Punkt in B anlangt.

Aufgabe 12. Über dem Mittelpunkte C einer materiellen Kreislinie, deren Radius a ist, deren Dichtigkeit ε und deren Querschnitt q konstant sind, befindet sich zur Zeit Null ein Punkt P in dem (senkrecht zur Kreisebene gemessenen) Abstande c in Ruhe. Er wird von der Kreislinie nach dem Newton'schen Gesetze angezogen.

Man soll berechnen, welche Geschwindigkeit (v) dieser Punkt P besitzt, wenn er sich im Abstande y von C befindet, mit welcher

(v_1) er durch C hindurch geht und was aus den Werten von v und v_1 für die Natur der Bewegung folgt.

Lösung. Die beschleunigende Kraft ergiebt sich unter Benutzung der Lösung der Aufgabe 139 des ersten Teiles. Sodann erhält man

$$v = \pm \sqrt{2B\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)} = \pm \sqrt{2B\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{b}\right)},$$

wobei

$$B = 2\pi akq\varepsilon,$$

b der ursprüngliche Abstand des Punktes P von der Kreislinie, hingegen u der während der Bewegung vorliegende (veränderliche).

Hieraus geht hervor, dafs die Bewegung eine schwingende ist und zwar eine solche, bei welcher in C die (gröfste) Geschwindigkeit

$$v_1 = \pm \sqrt{2B\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

herrscht.

Aufgabe 13. Wie Aufgabe 12; nur geschieht die Anziehung durch eine materielle Kreisfläche vom Radius a, der konstanten Dichtigkeit ε und Dicke δ.

Gesucht wird die Geschwindigkeit v des Punktes im Abstande y vom Centrum und derjenige Wert, welchen sie erreicht hat, wenn der Punkt im Centrum eintrifft.

Lösung. Wie in den vorhergehenden Lösungen erhält man (unter Benutzung von Nr. 141 des ersten Teiles)

$$v = K\sqrt{(\sqrt{a^2+y^2} - y) - (\sqrt{a^2+c^2} - c)},$$

worin K die Abkürzung für $2\sqrt{\pi k\delta\varepsilon}$ ist; oder auch

$$v = K\sqrt{(u-y) - (b-c)} = K\sqrt{s-(b-u)}$$

wenn man mit u den (veränderlichen) Abstand des sich bewegenden Punktes von dem Umfange der Kreisscheibe bezeichnet, unter b den Anfangswert von u versteht und unter s den zurückgelegten Weg.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt im Centrum anlangt, ist

$$v_1 = K\sqrt{a-b+c} = K\sqrt{c-(b-a)}.$$

Aufgabe 14. Auf der Achse eines homogenen, geraden, unendlich langen Kreiscylinders befindet sich anfänglich ein Punkt, im Abstande a von der Deckfläche, in Ruhe. Der Cylinder zieht ihn nach dem Newton'schen Gesetze an, hat den Radius c und die Dichtigkeit ε.

Man soll berechnen, wie grofs im Abstande y von der Deckfläche die Geschwindigkeit v ist und mit welcher (v_1) der Punkt am Cylinder ankommt.

Lösung. Mit Benutzung von Nr. 144 des ersten Teiles ergiebt sich

$$v = K\sqrt{(ab - uy) + c^2 l\frac{a+b}{u+y} + (y^2 - a^2)}$$

und

$$v_1 = K\sqrt{ab + c^2 l\frac{a+b}{c} - a^2},$$

in welchen Ausdrücken $K = \sqrt{2\pi k\varepsilon}$, $b = \sqrt{a^2 + c^2}$, $u = \sqrt{c^2 + y^2}$.

Aufgabe 15. In einer centralen Durchbohrung einer massiven, homogenen Kugel bewegt sich ein Punkt von der Masse 1 unter alleiniger Wirkung der Anziehung, welche nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt. Die Bewegung beginnt von der Oberfläche aus ohne Anfangsgeschwindigkeit. Wie grofs sind zur Zeit t die Geschwindigkeit v, die Mittelpunktsentfernung x und welcher Art ist die Bewegung?

Lösung. Die Beschleunigung, welche die Kugelanziehung erteilt, ist nach der Lösung der Aufgabe 149 des ersten Teiles bekannt. Mit Einführung derselben erhält man zunächst

$$v = \pm K\sqrt{a^2 - x^2},$$

wobei $K^2 = \frac{4}{3}\pi k\varepsilon$, k der bekannte Anziehungskoefficient und a der Kugelradius. Dann folgt

$$x = a \cos Kt,$$
$$v = aK \sin Kt.$$

Hiermit erkennt man die Bewegung als eine periodische. Die Zeiten, zu welchen sich der Punkt an der Kugeloberfläche befindet, sind 0, $\frac{\pi}{K}$, $2\frac{\pi}{K}$, $3\frac{\pi}{K}$ u. s. f.; die, zu welchen er durch

das Centrum geht, $\frac{\pi}{2K}$, $3\frac{\pi}{2K}$ u. s. w., also unabhängig von der Gröfse des Radius. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Mittelpunkt durchlaufen wird, ist $\pm aK$.

Aufgabe 16. Ein Punkt, welcher sich im Abstande $a = AC$ (Fig. 5) von der Erdmitte befindet, fällt im luftleeren Raume. Da a, verglichen mit dem Erdhalbmesser $r = CB$, sehr grofs ist, so mufs auf die Veränderlichkeit der Schwere Rücksicht genommen werden. Man soll für den aufserhalb der Erde stattfindenden Fall berechnen

I. wie grofs die Geschwindigkeit v ist, welche der Punkt erlangt hat, nachdem von ihm der Raum s durchfallen wurde und mit welcher Geschwindigkeit V er an der Erdoberfläche ankommt, wenn seine Bewegung von der Ruhe aus beginnt;

II. in welcher Zeit t er die Höhe s durchfällt und wie viel Zeit T er braucht, um bis zur Erde zu gelangen;

III. welche Geschwindigkeit er zur Zeit t erreicht hat und welchen Weg er während dieser Zeit durchfällt.

Lösung.

I. So lange sich der Punkt aufserhalb der Erde befindet, ist die Anziehung, welche er erleidet (Nr. 149, IV, im ersten Teile), umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung, nämlich

$$1) \qquad Q = g\frac{r^2}{(a-s)^2}.$$

Hieraus folgt ohne Schwierigkeit

$$2) \qquad v = r\sqrt{2g\frac{s}{a(a-s)}}$$

und

$$3) \qquad V = \sqrt{2gh\frac{r}{r+h}},$$

wenn mit h die ganze durchfallene Höhe bezeichnet wird. Kann h gegen r vernachlässigt werden, so liefert die letzte Gleichung die sehr bekannte (vergl. Aufgabe 3, Gleichung 3)

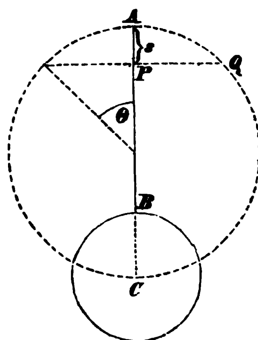
$$V_1 = \sqrt{2gh}.$$

Es ist also die Geschwindigkeit V immer kleiner als diejenige

(V_1), welche erlangt wird, wenn die Schwere überall so grofs ist, wie an der Erdoberfläche.

II. Bei Bestimmung der Zeit t kommt man auf die Differentialgleichung

$$\sqrt{\frac{a-s}{s}}\,ds = r\sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt.$$



Für die Integration derselben empfiehlt sich die Einführung eines Hilfswinkels θ mittelst der Substitution

4) $s = a\sin^2 \frac{1}{2}\theta.$

Sie liefert

5) $$a - s = a\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta,$$

was sich, als $a - s = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\theta$, in Fig. 5 leicht geometrisch deuten läfst. Nach Ausführung der Integration entsteht

6) $$t = k\,(\theta + \sin\theta),$$

wobei

7) $$k = \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{2g}}.$$

Aus 4) und 5) folgen $\sin\frac{1}{2}\theta$ und $\cos\frac{1}{2}\theta$. Damit hat man auch $\sin\theta$ und erhält

8) $$t = 2k\left[\frac{1}{a}\sqrt{s(a-s)} + \arcsin\sqrt{\frac{s}{a}}\right],$$

was auch in der Form

9) $$t = \frac{2k}{a}\left[\sqrt{s\,(a-s)} + \frac{a}{2}\arccos\frac{a-2s}{a}\right]$$

gegeben werden kann.

Die Zeit, in welcher der Punkt bis zur Erdoberfläche herabfällt, ist hiernach

10) $$T = \frac{2k}{a}\left[\sqrt{(a-r)r} + \frac{a}{2}\arccos\frac{2r-a}{a}\right].$$

III. Will man für einen bestimmten Augenblick t die Geschwindigkeit und die durchfallene Höhe haben, so mufs man aus

der transcendenten Gleichung 6) zunächst θ berechnen. Hat man dieses, so ist s durch 4) und 5) bekannt; dann aber auch v durch Gleichung 2).

Aufgabe 17. Mit welcher Geschwindigkeit c_0 mufs ein Körper (Punkt von der Masse 1) vom Monde aus nach der Erde geworfen werden, wenn er bis an diejenige Stelle zwischen beiden Himmelskörpern gelangen soll, an welcher die Anziehungen beider gleich sind, bei deren geringster Überschreitung er also nicht auf den Mond zurück, sondern auf die Erde fällt?

Gegeben wird Folgendes:

Mondmasse $\mu = \frac{1}{81}$ der Erdmasse m;
Mondradius $\varrho = \frac{3}{11}$ des Erdradius r;
Abstand der Mittelpunkte $e = 60r$;
Erdhalbmesser $r = \frac{20000000}{\pi}$ Meter;
Anziehung der Erde auf die Masse 1 an ihrer Oberfläche: $g = 9{,}809$ Meter.

Lösung. Für die Beschleunigung, welche der Körper erleidet, nachdem er sich um die Strecke s von der Mondoberfläche entfernt hat, findet man, weil das Newton'sche Gesetz gilt,

$$Q = \frac{km}{(e-\varrho-s)^2} - \frac{k\mu}{(\varrho+s)^2}.$$

Die nach 4) der „Zusammenstellung" (Seite 1) hieraus folgende Differentialgleichung liefert

$$\tfrac{1}{2}(c^2 - v^2) = k\left(\frac{m}{e-\varrho} + \frac{\mu}{\varrho} - \frac{m}{e-z} - \frac{\mu}{z}\right),$$

wobei $z = \varrho + s$ und c die Anfangsgeschwindigkeit.

Dies giebt schliefslich

$$c_0 = 2275 \text{ Meter.}$$

Aufgabe 18. Eine Kraft, welche umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung abstöfst, hat ihren Sitz in einem festen Centrum O. Ein im Abstande a befindlicher Punkt A erhält eine Anfangsgeschwindigkeit c in der Richtung von A nach O. Dann bewegt er sich offenbar bis zu einer gewissen Stelle B, an welcher er umkehrt und rückwärts läuft. Man soll ermitteln:

I. Für die Vorwärtsbewegung (von A nach O zu)

α) die Geschwindigkeit v als Funktion des Abstandes x von O;

β) den Abstand x als Funktion der Zeit t;

γ) die Entfernung b des Umkehrpunktes B von O;

δ) die Zeit t_b, welche der Punkt braucht, um von A nach B zu gelangen.

II. Für die Rückwärtsbewegung (von B nach A zu)

α) die Geschwindigkeit w als Funktion des Abstandes y von O;

β) den Abstand y als Funktion der Zeit;

γ) desgleichen w ausgedrückt durch die Zeit.

III. Die wichtigsten aus den abgeleiteten Gleichungen sich ergebenden Folgerungen.

Lösung. I. Ohne Schwierigkeit ergiebt sich für die Vorwärtsbewegung

1) $$v = \frac{\sqrt{(a^2 c^2 + k^2)\, x^2 - a^2 k^2}}{ax} = \frac{\sqrt{\varkappa^2 x^2 - a^2 k^2}}{ax},$$

wobei k^2 die Intensität der abstoſsenden Kraft für die Einheit der Entfernung und $\varkappa$ die Abkürzung für $\sqrt{a^2 c^2 + k^2}$.

Ferner

2) $$x = \frac{\sqrt{(\varkappa^2 t - a^3 c)^2 + a^4 k^2}}{a\varkappa};$$

3) $$b = \frac{ak}{\varkappa};$$

4) $$t_b = \frac{a^3 c}{\varkappa^2}.$$

II. Ebenso folgt für die Rückwärtsbewegung

5) $$w = \frac{k\sqrt{y^2 - b^2}}{by};$$

6) $$y = \frac{\sqrt{b^4 + k^2 t^2}}{b};$$

7) $$w = \frac{k^2 t}{b\sqrt{b^4 + k^2 t^2}}.$$

Hierbei ist die Zeit in I. von dem Augenblicke an gezählt, zu

welchem in A die Bewegung beginnt; bei II. aber von dem Momente an, zu welchem in B das Rückwärtslaufen eintritt.

III. Aus diesen Gleichungen ist leicht zu ersehen, dafs die Bewegungserscheinungen beim Vorlaufe dieselben sind, wie beim Rücklaufe, nur in entgegengesetzter Folge. Die Geschwindigkeit bei der Rückwärtsbewegung nähert sich der Grenze $\frac{k}{b}$, was man sofort erkennt, wenn man in 7) die Zeit t gleich ∞ nimmt, nachdem man vorher passend umgeformt hat.

Aufgabe 19. Ein beweglicher materieller Punkt wird von einem in der Entfernung a befindlichen Centrum C umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Abstande angezogen. Die Bewegung beginnt ohne Anfangsgeschwindigkeit und endigt in C. Es soll berechnet werden

I. die Geschwindigkeit v des Punktes im Abstande x von C;
II. diejenige (V), mit welcher er in C anlangt;
III. die Zeit t, nach deren Verlauf er um x von C absteht;
IV. die andere (T), zu welcher er daselbst ankommt; endlich
V. diejenige (t_1), um welche er die Geschwindigkeit v_1 besitzt.

Lösung. Bezeichnet k^2 die Intensität der Anziehung im Abstande 1, so ist

$$v = 2k\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{x}},$$

$$V = 2k\sqrt[4]{a},$$

$$t = \frac{2}{3k}(2\sqrt{a}+\sqrt{x})\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{x}},$$

$$T = \frac{4}{3k}\sqrt[4]{a^3},$$

$$t_1 = \frac{12\sqrt{a}k^2 - v_1^2}{12k^4}v_1.$$

Aufgabe 20. In einem festen Mittelpunkte M wirkt eine proportional der n^{ten} Potenz der Entfernung anziehende Kraft. Ihre Intensität ist im Abstande 1 gleich k. Ein materieller Punkt, welcher von M um a absteht, besitzt zur Zeit Null eine nach M gerichtete Anfangsgeschwindigkeit c. Welche Geschwindigkeit v hat er, nachdem er noch um die Strecke x vom Mittelpunkte entfernt ist? Mit welcher (V) langt er in M an? Wie grofs mufs

sein anfänglicher Abstand a sein, wenn er mit der vorgeschriebenen Geschwindigkeit u in M eintreffen soll?

Lösung. Für $n \gtrless -1$ ist

$$v = \sqrt{\frac{2k}{n+1}(a^{n+1} - x^{n+1}) + c^2}$$

und

$$V = \sqrt{\frac{2k}{n+1} a^{n+1} + c^2}.$$

Der bewegliche Punkt mufs also den ursprünglichen Abstand

$$a = \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2k}(u^2 - c^2)}$$

haben, wenn er mit der Geschwindigkeit u in M anlangen soll.

Für $n = -1$ hingegen erhält man

$$v = \sqrt{2kl\frac{a}{x} + c^2}$$

und

$$V = \infty.$$

In diesem Falle trifft also der sich bewegende Punkt immer mit unendlich grofser Geschwindigkeit in M ein, aus welcher Entfernung er auch kommen mag.

Aufgabe 21. Zwei frei bewegliche Punkte, deren Massen m, bezüglich n sind, befinden sich anfänglich in dem gegenseitigen Abstande a in Ruhe und ziehen sich nach dem Newton'schen Gesetze an. Berechnet soll werden

I. die Zeit t, nach welcher sie die gegenseitige Fntfernung z $(< a)$ haben;

II. diejenige (T), um welche sie zusammentreffen;

III. die Gröfse ihrer Entfernung z zu einer bestimmten, in Sekunden gegebenen Zeit t;

IV. die Längen der Wege x, bezüglich y, die von den beiden Punkten während dieser Zeit durchlaufen worden sind.

Lösung. I. Versteht man zunächst unter x und y die zu einer ganz beliebigen Zeit t zurückgelegten Wege, so hat man, wie leicht zu erkennen ist,

$$1) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{kn}{z^2}$$

und

$$2) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{km}{z^2}$$

als Differentialgleichungen der Bewegung (wobei k selbstverständliche Bedeutung besitzt).

Aus dem zwischen a, x, y und z bestehenden Zusammenhange folgt hiermit

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = - \frac{k(m+n)}{z^2}$$

oder

$$z' \, dz' = - k \, (m + n) \frac{dz}{z^2}.$$

Integriert man und beachtet, dafs $z' = - (v + w)$ ist (wenn mit v und w die zur Zeit t vorliegenden Geschwindigkeiten der beiden Punkte bezeichnet werden), so entsteht

$$z' = - \sqrt{\frac{2k\,(m+n)}{a}} \sqrt{\frac{a-z}{z}}.$$

Wird bei der nun folgenden Integration die Sustitution

$$3) \qquad z = a \cos^2 \tfrac{1}{2} \theta$$

benutzt und die Konstante durch Rücksicht auf den Anfangszustand bestimmt, so ergiebt sich leicht

$$4) \qquad \theta + \sin \theta = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{2\,k\,(m+n)}{a}}\, t,$$

also

$$5) \qquad t = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a}{2\,k\,(m+n)}}\, (\theta + \sin \theta).$$

Hiermit ist die Frage I beantwortet, denn der in *Gl.* 5) vorkommende Hilfswinkel ist durch *Gl.* 3) oder durch

$$6) \qquad \theta = 2 \arccos \sqrt{\frac{z}{a}}$$

bestimmt.

II) Das Zusammentreffen erfolgt [nach 5)] zu der Zeit

7) $$T = \frac{a\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{2k(m+n)}}.$$

III. Die Entfernung z, in welcher sich die Punkte zu einer bestimmten, in Sekunden gegebenen Zeit t befinden, ergiebt sich, indem man aus der transcendenten Gleichung 4) zunächst θ berechnet, nachdem vorher für t die Sekundenzahl eingesetzt worden ist. Mit θ hat man dann auch z, nämlich durch Nr. 3).

IV. Ist z bekannt, so ist es auch

8) $$x + y = a - z.$$

Eine zweite Gleichung mit x und y folgt aus 1) und 2), nach welchen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - n\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Da hier die linke Seite ein vollständiges Differential ist, so kann man ohne alle Schwierigkeit zweimal integriren und erhält (indem man die Konstanten mit Rücksicht auf den Anfangszustand bestimmt)

9) $$mx = ny.$$

Diese, das Gesetz

$$x : y = n : m$$

ausdrückende Gleichung giebt mit 8) zusammen

10) $$x = \frac{n}{m+n}(a-z)$$

und

11) $$y = \frac{m}{m+n}(a-z).$$

Da nun, nach 3),

$$a - z = a\sin^2\tfrac{1}{2}\theta$$

ist, und θ für ein in Sekunden gegebenes t aus 4) berechnet werden kann, so hat man hiermit auch x und y zu dieser Zeit.

Aufgabe 22. An den Enden A und B einer Geraden von der Länge a befinden sich zwei Punkte, welche die Massen m und n haben, ursprünglich in Ruhe. Sie ziehen sich proportional den Massen und umgekehrt proportional den dritten Potenzen der Entfernungen an.

I. Welchen Weg x hat der erste Punkt nach Verlauf der Zeit t zurückgelegt und welchen Weg y der zweite?

II. Zu welcher Zeit T treffen die Punkte zusammen und wo erfolgt der Zusammenstofs?

Lösung. I. Als Differentialgleichungen der Bewegung hat man hier

1) $$v\frac{dv}{dx}=\frac{kn}{(a-x-y)^3},$$

2) $$w\frac{dw}{dy}=\frac{km}{(a-x-y)^3},$$

wobei k, v und w dieselbe Bedeutung haben, wie in der Lösung der vorigen Aufgabe.

Wie dort ergiebt sich

3) $$mx=ny.$$

Hieraus folgt zuächst

$$v=\frac{n\sqrt{k}}{a}\,\frac{\sqrt{2anx-(m+n)x^2}}{an-(m+n)x}$$

und nachher

4) $$x=\frac{n}{a(m+n)}\left[a^2-\sqrt{a^4-k(m+n)t^2}\right];$$

mithin

5) $$y=\frac{m}{a(m+n)}\left[a^2-\sqrt{a^4-k(m+n)t^2}\right].$$

II. Der Zusammenstofs ereignet sich zu der Zeit

6) $$T=\frac{a^2}{\sqrt{k(m+n)}},$$

in den Abständen $\frac{an}{m+n}$ von A und $\frac{am}{m+n}$ von B.

Aufgabe 23. Wie Aufgabe 22; doch ist die Anziehung irgend eine Funktion der Entfernung, also $nf(a-x-y)$, bezüglich $mf(a-x-y)$. Gefragt wird

I. Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Geschwindigkeiten v und w, die die zwei Punkte zur Zeit t besitzen?

II. Welche zwischen den von ihnen zurückgelegten Wegen x und y?

III. Wie läfst sich die gegenseitige Entfernung z der Punkte und wie lassen sich x und y als Funktionen von t bestimmen?

IV. Was ergiebt sich aus den unter I bis III gefundenen Resultaten für den Fall, dafs die Anziehung α) umgekehrt pro-

portional dem Quadrate, β) dafs sie umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung ist?

Lösung. Auf dem in den Lösungen der Aufgaben 21 und 22 eingeschlagenen Wege findet man:

I. Die Geschwindigkeiten verhalten sich stets umgekehrt wie die Massen ($v : w = n : m$).

II. Ebenso die zurückgelegten Wege x und y.

III. Wenn $a - x - y$ mit z und $\int f(z)\,dz$ mit $\varphi(z)$ bezeichnet wird, wenn ferner die Integrationskonstanten C und C_1 genannt werden, so ist

$$z' = \sqrt{2(m+n)[C - \varphi(z)]},$$

also

$$\int \frac{dz}{\sqrt{C - \varphi(z)}} = \sqrt{2(m+n)}\,t + C_1,$$

daher

$$z = \psi(t),$$

das ist

$$x + y = a - \psi(t).$$

Unter Benutzung des in II enthaltenen Satzes folgt hieraus

$$x = \frac{n}{m+n}[a - \psi(t)],$$

$$y = \frac{m}{m+n}[a - \psi(t)].$$

IV. In den genannten speciellen Fällen liefern die unter I bis III entwickelten Resultate Das, was in den Lösungen der beiden vorhergehenden Aufgaben angegeben worden ist.

Aufgabe 24. In einer Flüssigkeit bewegt sich ein materieller Punkt zufolge eines Stofses, den er zur Zeit Null erhalten und der ihm die Geschwindigkeit c erteilt hat, in solcher Weise, dafs immer der von ihm zurückgelegte Weg

$$s = \frac{kc - W}{k^2}$$

ist, in welchem Ausdrucke W den veränderlichen Widerstand des Mittels bedeutet und k eine von der Natur des letzteren abhängende Konstante. Aufser W wirkt auf den Punkt keine Kraft. Man soll berechnen

I. welche Geschwindigkeit v er besitzt nach dem Durchlaufen des Weges s;

II. in welcher Weise der Widerstand W von der Geschwindigkeit v abhängt.

Lösung. Es ergeben sich die Gleichungen

$$v = c - ks$$

und

$$W = kv,$$

welche sehr einfache Sätze aussprechen.

C. Gegeben eine Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft Q und der Geschwindigkeit v.

Aufgabe 25. Ein materieller Punkt (Masse 1) wird mit der Anfangsgeschwindigkeit c in eine Flüssigkeit gestofsen, welche der Geschwindigkeit proportional widersteht. Es wirkt auf ihn keine andere Kraft, als dieser Widerstand. Die entstehende Bewegung soll untersucht werden bezüglich des Zusammenhanges zwischen dem zurückgelegten Wege s, der verflossenen Zeit t und der erlangten Geschwindigkeit v.

Lösung. Setzt man den für die Geschwindigkeit 1 vorliegenden Widerstand gleich k, so ist der nach der Zeit t durchlaufene Weg (wenn beide vom Beginne der Bewegung ab gezählt werden)

$$1)\qquad s = \frac{c}{k}(1 - e^{-kt}),$$

nähert sich also bei unendlich wachsendem t der Grenze $\frac{c}{k}$. Die zur Zeit t herrschende Geschwindigkeit ist

$$2)\qquad v = ce^{-kt}.$$

Der Punkt bewegt sich mithin immer langsamer, bleibt aber erst nach unendlich langer Zeit stehen. Nach 1) und 2) hat man auch noch die leicht in Worte zu fassenden Beziehungen

$$3)\qquad s = \frac{c - v}{k}$$

und

$$4)\qquad v = c - ks.$$

Aufgabe 26. Zur Zeit Null besitzt eine kleine Kugel (Punkt von der Masse 1), welche sich in einem widerstehenden Mittel bewegt, die Anfangsgeschwindigkeit c, hat jedoch noch keinen Weg zurückgelegt. Der Widerstand, die einzige auf die Kugel wirkende Kraft, ist dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional und besitzt für v gleich 1 den Wert k. Zu bestimmen sind

I. die Geschwindigkeit v der Kugel zur Zeit t;
II. der um diese Zeit zurückgelegte Weg s;
III. die Beziehung zwischen v und s;
IV. diejenige Zeit t_1, zu welcher die Geschwindigkeit u herrscht;
V. die Gröfsen von v und s nach unendlich langer Zeit.

Lösung. Ohne alle Schwierigkeiten erhält man

$$v = \frac{c}{1 + ckt},$$

$$s = \frac{1}{k} l(1 + ckt),$$

$$s = \frac{1}{k} l \frac{c}{v},$$

$$t_1 = \frac{c - u}{cku},$$

$$v_\infty = 0,$$

$$s_\infty = \infty.$$

Das letzte Resultat verdient sehr, mit dem entsprechenden der vorhergehenden Lösung (Aufg. 25) verglichen zu werden.

Aufgabe 27. Der Widerstand ist der Geschwindigkeit v umgekehrt proportional; sonst Alles, wie bei der vorigen Aufgabe. Auch soll die Bewegung in demselben Umfange untersucht werden.

Lösung. Sehr leicht ergiebt sich

$$v = \sqrt{c^2 - 2kt},$$

$$s = \frac{1}{3k}(c^3 - \sqrt{c^2 - 2kt}^3).$$

Beide Ausdrücke sind nur reell, für $t \leqq \frac{c^2}{2k}$

Ferner

$$s = \frac{1}{3k}(c^3 - v^3)$$

und, bei derselben Bedeutung, wie in der Lösung der Aufgabe 26,

$$t_1 = \frac{c^2 - u^2}{2k}.$$

Zu der Zeit

$$T = \frac{c^2}{2k}$$

bleibt die Kugel stehen und hat dann den Gesammtweg

$$S = \frac{c^3}{3k}$$

zurückgelegt.

Aufgabe 28. Die auf einen materiellen Punkt wirkende beschleunigende Kraft ist

$$Q = \sqrt{2k(v-c)},$$

wobei v die Geschwindigkeit, c ihr Anfangswert und k eine gegebene Konstante. Der zurückgelegte Weg s, die erlangte Geschwindigkeit v und die beschleunigende Kraft werden als Funktionen der vom Bewegungsbeginne an verflossenen Zeit t gesucht.

Lösung.

$$v = c + \tfrac{1}{2} kt^2;$$
$$s = ct + \tfrac{1}{6} kt^3;$$
$$Q = kt,$$

also der Zeit proportional.

Aufgabe 29. Wie Aufgabe 26; der Widerstand ist aber der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit proportional; n wird gröſser als 2 vorausgesetzt. Gesucht werden v und s als Funktionen von t; die Beziehung zwischen v und s; die zum Durchlaufen des Weges s nötige Zeit.

Lösung. Die zur Zeit t herrschende Geschwindigkeit ist

$$v = [c^{1-n} - (1-n)kt]^{\frac{1}{1-n}};$$

der um diese Zeit zurückgelegte Weg

$$s = \frac{1}{(2-n)k}\left\{c^{2-n} - [c^{1-n} - (1-n)kt]^{\frac{2-n}{1-n}}\right\}.$$

Die zwischen Geschwindigkeit und Weg bestehende Beziehung lautet

$$s = \frac{1}{(2-n)k}(c^{2-n} - v^{2-n}).$$

Es liegt mithin nach dem Durchlaufen des Weges s die Geschwindigkeit

$$v = [c^{2-n} - (2-n)ks]^{\frac{1}{2-n}}$$

vor und wird für denselben die Zeit

$$t = \frac{1}{(1-n)k}\left\{c^{1-n} - [c^{2-n} - (2-n)ks]^{\frac{1-n}{2-n}}\right\}$$

gebraucht.

Diese Formeln auf einige spezielle Fälle anzuwenden und dann näher zu untersuchen, kann empfohlen werden.

Aufgabe 30. Unter dem Einflusse einer im Sinne der Anfangsgeschwindigkeit wirkenden konstanten beschleunigenden Kraft a bewegt sich ein Körper (Punkt von der Masse 1) in einem Mittel, welches der Geschwindigkeit v proportional widersteht. Für $v = 1$ ist die Intensität des Widerstandes $= b$; zur Zeit Null ist $v = c$ und noch kein Weg zurückgelegt. Man soll berechnen

I. nach welcher Zeit t der Körper die Geschwindigkeit v haben wird;

II. wie sich v als Funktion von t ausdrücken läfst und ob die Bewegung nach und nach in eine gleichförmige übergeht;

III. wie grofs der zurückgelegte Weg s nach Verlauf der Zeit t ist;

IV. welche Beziehung zwischen v und s besteht.

Lösung. Die Geschwindigkeit v besitzt der Körper zu der Zeit

$$t = \frac{1}{b}\, l\, \frac{a - bc}{a - bv}.$$

Hieraus folgt

$$v = \frac{a - (a - bc)e^{-bt}}{b},$$

woraus man ersieht, dafs die Bewegung sich mehr und mehr einer gleichförmigen mit der Geschwindigkeit $\frac{a}{b}$ nähert.

Ferner ist

$$s = \frac{1}{b^2}\,[abt - (a - bc)(1 - e^{-bt})]$$

und

$$s = \frac{1}{b^2}\left[b(c - v) + al\,\frac{a - bc}{a - bv}\right].$$

Aufgabe 31. Wie Aufg. 30; nur mit dem Unterschiede, dafs die Kraft a in dem der Anfangsgeschwindigkeit entgegengesetzten

Sinne wirkt. Vor- und Rücklauf des Körpers sind zu untersuchen und zu vergleichen.

Lösung. Die Vorwärtsbewegung erfolgt so, dafs zu der vom Beginne an gezählten Zeit t die Geschwindigkeit

$$1)\qquad v = \frac{(a+bc)e^{-bt} - a}{b}$$

ist. Der Körper bewegt sich also immer langsamer und bleibt in dem Augenblicke

$$2)\qquad t_1 = \frac{1}{b}\, l\, \frac{a+bc}{a}$$

stehen, um sogleich den Rückweg anzutreten. Während desselben wirkt die Kraft a nicht mehr verzögernd, sondern beschleunigend und erteilt in der vom Umkehrmomente an gezählten Zeit t die Geschwindigkeit

$$3)\qquad v = \frac{a(1-e^{-bt})}{b}.$$

Diese nähert sich mehr und mehr der Grenze $\frac{a}{b}$, d. h. die Bewegung wird einer gleichförmigen immer ähnlicher. Wenn abermals die durch Gleichung 2) bestimmte und für den ganzen Vorlauf nötig gewesene Zeit t_1 verflossen ist, herrscht die Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{a}{a+bc}\, c,$$

welche, wie man sofort sieht, von c übertroffen wird und zwar um

$$\frac{bc}{a+bc}\, c.$$

Diejenige Zeit t_2, welche der Punkt braucht, um beim Rücklaufe wieder die Geschwindigkeit c zu erwerben, mit der er seine Bewegung begann, ist um

$$\varDelta = \frac{1}{b}\, l\, \frac{a^2}{a^2 - b^2c^2}$$

gröfser als diejenige t_1, welche er nötig hatte, um c vollständig zu verlieren. Für $bc > a$ wird $\varDelta$ imaginär, was nicht befremden kann, weil beim Rücklaufe $\frac{a}{b}$ die gröfste überhaupt erreichbare Geschwindigkeit ist.

Während der Vorwärtsbewegung legt der Körper in der Zeit t immer die Strecke

$$s = \frac{1}{b^2}[(a + bc)(1 - e^{-bt}) - abt]$$

zurück; im Ganzen also den Weg

$$s_1 = \frac{1}{b^2}\left(bc - al\frac{a + bc}{a}\right).$$

Bei dem Rücklaufe hingegen ist (nach der vom Umkehraugenblicke an gerechneten Zeit t)

$$s = \frac{a}{b^2}(bt + e^{-bt} - 1)$$

der, ab Umkehrstelle, zurückgelegte Weg. Er hat für grofse t näherungsweise die Länge $\frac{a}{b}t$, was mit dem vorher gefundenen

$$Lim\, v = \frac{a}{b}$$

übereinstimmt.

Die zwischen v und s bestehenden Beziehungen sind

$$s = \frac{1}{b^2}\left[b(c - v) - al\frac{a + bc}{a + bv}\right],$$

bezüglich

$$s = \frac{1}{b^2}\left(al\frac{a}{a - bv} - bv\right).$$

Aufgabe 32. Aus einer Höhe, welche nicht so bedeutend ist, dafs die Veränderlichkeit der Schwere berücksichtigt werden mufs, fällt ein Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit nach der Erde zu. Der Widerstand der Luft ist dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional, und der fallende Körper wird als ein mit der Masse 1 versehener Punkt vorausgesetzt.

I. Welche Geschwindigkeit v ist nach der Zeit t erlangt und welche Strecke s während dieser Zeit durchfallen worden?

II. Wie grofs ist die beim Durchlaufen des Weges s erworbene Geschwindigkeit v und welche Höhe h mufs durchfallen werden, wenn eine vorgeschriebene Geschwindigkeit u erlangt werden soll?

III. Welche Zeit T braucht der Körper, um aus der Höhe S herabzufallen?

IV. Wie lassen sich aus den unter I und II gefundenen Gleichungen diejenigen herleiten, die (nach der Lösung der Aufgabe 3) dann gelten, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden darf?

Lösung. I. Es wirken auf den Körper die Beschleunigung g der Schwere und der Widerstand μv^2, wobei μ selbstverständliche Bedeutung hat. Wird

$$1)\qquad \frac{\mu}{g} = k^2$$

gesetzt, so ist

$$2)\qquad v = \frac{1}{k}\,\frac{e^{gkt} - e^{-gkt}}{e^{gkt} + e^{-gkt}}.$$

Die Bewegung nähert sich also mehr und mehr einer gleichförmigen mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{k}$, das ist $\sqrt{\frac{g}{\mu}}$.

Ferner ergiebt sich

$$3)\qquad s = \frac{1}{gk^2}\,l\,\frac{e^{gkt} + e^{-gkt}}{2}.$$

II. Aus der Höhe s kommend, hat der Körper die Geschwindigkeit

$$4)\qquad v = \frac{1}{k}\sqrt{1 - e^{-2gk^2s}};$$

mithin mufs man ihn durch

$$5)\qquad h = \frac{1}{2gk^2}\,l\,\frac{1}{1 - k^2u^2}$$

herabfallen lassen, wenn er mit der Endgeschwindigkeit u auftreffen soll.

III. Die zum Durchfallen der Höhe S nötige Zeit ist

$$T = \frac{1}{2gk}\,l\,\frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2gk^2S}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2gk^2S}}}.$$

IV. Wenn kein Luftwiderstand vorliegt, so ist [nach Gl. 1)] $k = 0$. Damit nimmt das durch Gleichung 2) bekannte v zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Differenziert man aber Zähler wie Nenner einzeln nach k und setzt dann letzteres $= 0$, so entsteht

$$v = gt,$$

wie in der Lösung der Aufgabe 3. Zu demselben Resultate kann

man auch gelangen, wenn man in Gleichung 2) die bekannten Reihen für $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ anwendet, welche für jedes endliche x gelten.

Der durch 3) gegebene Wert von s nimmt für $k = 0$ ebenfalls die Form $\frac{0}{0}$ an. Werden Zähler und Nenner nach k differenziert, so entsteht

$$\frac{(e^{gkt} - e^{-gkt})\,t}{(e^{gkt} + e^{-gkt})\,2k},$$

was, wenn man $k = 0$ setzt, nochmals $\frac{0}{0}$ giebt. Wiederholung des bekannten Verfahrens liefert

$$s = \tfrac{1}{2}\,gt^2.$$

Dasselbe ergiebt sich bei Anwendung der Reihe für $l\,\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Auf Gleichung 4), welche sich auch

$$h = -\frac{1}{2gk^2}\,l(1 - k^2u^2)$$

schreiben läfst, angewendet, liefert das mehrbenutzte Differenzierverfahren

$$h = \frac{u^2}{2g},$$

also

$$u = \sqrt{2gh},$$

wie in der Lösung der Aufgabe 3.

Dasselbe ergiebt sich bei Anwendung der Reihe

$$l(1 - x) = -\tfrac{1}{1}\,x - \tfrac{1}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{3}\,x^3 - \ldots\ldots,$$

deren Giltigkeitsbedingung

$$-1 \leqq x < +1$$

erfüllt ist, weil [nach Gl. 3)] ku immer kleiner als 1 sein mufs.

Aufgabe 33. Von der Erdoberfläche aus wird ein Körper (Punkt von der Masse 1) mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen. Der Luftwiderstand ist (wie bei Aufg. 32) dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional und für die Einheit derselben gleich μ. Die Schwere wird als unveränderlich angesehen.

I. Wie grofs sind beim Aufsteigen v und s nach der Zeit t und welche Beziehung besteht zwischen beiden?

II. Welche Zeit T braucht der Körper, um bis zum höchsten Punkte seiner Bahn zu gelangen?

III. Welche Höhe S ersteigt er im Ganzen?

IV. Wie lassen sich aus den unter I gefundenen Werten von v und s diejenigen herleiten, welche im nicht widerstehenden Mittel gelten?

V. In welchem Verhältnisse steht die Geschwindigkeit v_1, mit der der Körper, von der höchsten Stelle herabfallend, wieder unten anlangt, zu der Anfangsgeschwindigkeit c?

VI. Wie verhält sich die zum Herabfallen aus der gröfsten Höhe nötige Zeit T_1 zu derjenigen T, welche zum Aufsteigen gebraucht wird?

VII. Auf welche Weise läfst sich der Widerstandscoefficient μ bestimmen, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit c kennt und die Zeit, welche verstreicht, bis der Körper wieder auf der Erde ankommt?

Lösung. I. Unter Beibehaltung der in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe benutzten Abkürzung

$$k = \sqrt{\frac{\mu}{g}},$$

ergiebt sich

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{ck - \tan gkt}{1 + ck \tan gkt}$$

oder auch

$$v = \frac{1}{k} \frac{ck \cos gkt - \sin gkt}{\cos gkt + ck \sin gkt}.$$

Ferner

$$s = \frac{1}{gk^2} l (\cos gkt + ck \sin gkt)$$

und

$$s = \frac{1}{2gk^2} l \frac{1 + k^2c^2}{1 + k^2v^2}.$$

II. Die bis zum Aufsteigen an die höchste Stelle nötige Zeit ist

$$T = \frac{1}{gk} \operatorname{arctan} kc;$$

III. die Steighöhe

$$S = \frac{1}{2gk^2}\, l\,(1 + k^2 c^2)\cdot$$

IV. Im nicht widerstehenden Mittel ist $k = 0$. Damit nehmen die für v und s gefundenen Gleichungen zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Wendet man, unter gleichzeitiger Benutzung passender Umgestaltungen, die bekannte für die Bestimmung der Werte derartiger Ausdrücke geltende Regel der Differentialrechnung an (vergl. IV der vorigen Lösung), so ergeben sich ohne nennenswerte Schwierigkeiten die unter Aufgabe 4 stehenden Gleichungen.

V. Durch Benutzung von II der vorhergehenden Lösung ergiebt sich, dafs der Körper mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{1 + k^2 c^2}}$$

auf die Erdoberfläche zurückfällt. Dieselbe ist also kleiner wie die Anfangsgeschwindigkeit c, mit welcher er aufstieg und verhält sich zu letzterer wie 1 zu $\sqrt{1 + k^2 c^2}$.

VI. Ebenso erhält man durch Anwendung der unter III in der Lösung der Aufgabe 32 entwickelten Gleichung den Ausdruck

$$T_1 = \frac{1}{gk}\, l\,(kc + \sqrt{1 + k^2 c^2})$$

als die zum Herabfallen von der höchsten Stelle nötige Zeit. Daher gilt

$$T : T_1 = arctan\, kc : l\,(kc + \sqrt{1 + k^2 c^2})\cdot$$

Setzt man $kc = \xi$, so kann $arctan\ \xi$ als die von 0 bis ξ gerechnete Fläche der Kurve

$$\eta = \frac{1}{1 + \xi^2}$$

angesehen werden; ebenso $l\,(\xi + \sqrt{1 + \xi^2})$ als die der Linie

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Da nun

$$\sqrt{1 + \xi^2} < 1 + \xi^2,$$

so ist $\eta < \eta_1$, mithin auch $T < T_1$. Für das Hinaufsteigen ist daher weniger Zeit erforderlich, als für das Herabfallen von der höchsten Stelle.

VII. Aus der Gleichung

$$T + T_1 = \frac{1}{gk}\left[\arctan kc + l\left(kc + \sqrt{1 + k^2 c^2}\right)\right]$$

läfst sich, weil alles Übrige bekannt ist, k bestimmen; man hat also auch μ, weil $\mu = k^2 g$.

Aufgabe 34. Unter den in den Aufgaben 32 und 33 vorausgesetzten Umständen fällt ein Körper aus der Höhe s_1 auf eine Unterlage, die ihn, wegen vollkommener Elasticität, mit der Auftreffgeschwindigkeit wieder nach oben wirft. Er ersteigt in Folge dessen die Höhe s_2, fällt aus dieser wieder herab, wird abermals hinauf geworfen, ersteigt die Höhe s_3 u. s. f. u. s. f. Man soll mit Benutzung der Lösungen der genannten beiden Aufgaben die Höhen $s_2, s_3, \ldots . s_n$ durch s_1 ausdrücken und auch angeben, wie grofs dieselben sind, wenn s_1 unendlich ist.

Lösung. Setzt man $2gk^2 = \varkappa$, so ergiebt sich

$$s_2 = \frac{1}{\varkappa}\, l\, \frac{2e^{\varkappa s_1} - 1}{e^{\varkappa s_1}},$$

$$s_3 = \frac{1}{\varkappa}\, l\, \frac{3e^{\varkappa s_1} - 2}{2e^{\varkappa s_1} - 1}$$

u. s. f., also

$$s_n = \frac{1}{\varkappa}\, l\, \frac{ne^{\varkappa s_1} - (n-1)}{(n-1)\,e^{\varkappa s_1} - (n-2)}.$$

Wenn die erste Höhe (s_1) unendlich ist, so sind doch alle folgenden endlich, nämlich

$$s_2 = \frac{1}{\varkappa}\, l2;$$

$$s_3 = \frac{1}{\varkappa}\, l\tfrac{3}{2}$$

u. s. f.; allgemein

$$s_n = \frac{1}{\varkappa}\, l\, \frac{n}{n-1}.$$

Aufgabe 35. Ein Eisenbahnzug, welcher das Gewicht P besitzt, bewegt sich von einem Punkte A aus auf einer schiefen Ebene, die unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist. Er hat die Anfangsgeschwindigkeit c, und es wirkt die konstante Zugkraft Q in der Richtung der Bewegung. Der gesammte Luftwiderstand ist Kv^2; der Reibungskoefficient $f = \tan\beta$, wobei β

der Reibungswinkel. Für die Thalfahrt und für die Bergfahrt sollen ermittelt werden

a) die Geschwindigkeit v des Zuges zur Zeit t;

b) der von ihm zu dieser Zeit durchlaufene, von A aus gezählte Weg s;

c) die beim Zurücklegen der Strecke s erlangte Geschwindigkeit v;

d) die aus den erhaltenen Gleichungen sich ergebenden wichtigsten Folgerungen, besonders auch diejenige Zugkraft, welche zur Herstellung einer gleichförmigen Bewegung nötig sein würde.

Lösung. *A. Die Thalfahrt.*

Als Differentialgleichung der Bewegung ergiebt sich

$$1)\qquad \frac{dv}{dt} = \frac{gK}{P}\left\{\frac{Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{K} - v^2\right\}.$$

Es müssen daher die folgenden drei Fälle unterschieden werden.

I^ter^ Fall: $\qquad Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha) > 0$

oder, weil $f = \tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ ist,

$$Q + P\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} > 0,$$

was für $\alpha > \beta$ stets stattfindet und für $\alpha < \beta$ dann, wenn

$$Q > P\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\beta}$$

ist.

Zur Abkürzung sei hier und in allen folgenden Fällen

$$\frac{gK}{P} = k;$$

ferner, doch nur in diesem ersten Falle,

$$\frac{Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{K} = b^2.$$

Dann liefert die Gleichung 1)

$$v = b\,\frac{(b + c)\,e^{bkt} - (b - c)\,e^{-bkt}}{(b + c)\,e^{bkt} + (b - c)\,e^{-bkt}},$$

$$s = \frac{1}{k}\,l\,\frac{(b + c)\,e^{bkt} + (b - c)\,e^{-bkt}}{2b}$$

Aufgab

VII.

Sich

fst auch

lso Auf

ausgesetz

Unterlag

treffgesch

dessen

hinauf

Benutz

s_2, s_3

dieselb

so folgt

$$v = b\,\frac{c - b\tan bkt}{b + c\tan bkt},$$

was sich mit Benutzung von

$$\frac{c}{b} = \tan\gamma$$

eleganter in der Form

$$v = b\tan(\gamma - bkt)$$

geben läfst.

Ferner

$$s = \frac{1}{k}\, l\,(\cos bkt + \tan\gamma\sin bkt)$$

und

$$v = \sqrt{(b^2 + c^2)\,e^{-2ks} - b^2}.$$

Dies lehrt, dafs die Bewegung eine verzögerte ist und dafs der Zug stehen bleibt zu der Zeit

$$t = \frac{1}{bk}\arctan\frac{c}{b},$$

mithin nachdem er den Weg

$$s = \frac{1}{k}\, l\sec\gamma = \frac{1}{2k}\, l\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)$$

zurückgelegt hat.

B. Die Bergfahrt.

Für diese lautet die Differentialgleichung der Bewegung

2) $$\frac{dv}{dt} = \frac{gK}{P}\left\{\frac{Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{K} - v^2\right\},$$

und es sind abermals drei Fälle zu unterscheiden.

I^ter Fall: $$Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) > 0$$

oder

$$Q - P\,\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta} > 0.$$

Wird hier zur Abkürzung

$$\frac{Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{K} = b^2$$

gesetzt, so folgen für v und s wieder die beim ersten Falle der Thalfahrt gefundenen Gleichungen, in denen nur b jetzt eine andere

und

$$v = \sqrt{b^2 - (b^2 - c^2)\, e^{-2ks}}.$$

Man erkennt hieraus Folgendes:

Die Zuggeschwindigkeit v nähert sich der Grenze b, wenn t in's Unendliche wächst. Ist $c < b$, so wächst v von c bis b. Für $c = b$ liegt gleichförmige Bewegung vor. Hierzu gehört die Zugkraft

$$Q = Kc^2 + P\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\beta}.$$

Dieselbe ist für $\alpha \leqq \beta$ jedenfalls positiv, kann aber negativ werden, wenn $\alpha > \beta$ ist. (Bremsen des Zuges.)

Für $c > b$ nimmt die Geschwindigkeit von c bis b ab.

II[ter] Fall: $Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 0$

oder

$$Q = P\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\beta},$$

mithin $\beta > \alpha$.

Hier giebt die Gleichung 1):

$$v = \frac{c}{1 + ckt},$$

$$s = \frac{1}{k}\, l\,(1 + ckt)$$

und

$$v = c\, e^{-ks}.$$

In diesem zweiten Falle wird also die Geschwindigkeit des Zuges eine immer geringere und nähert sich mehr und mehr der Null, doch ohne letztere in endlicher Zeit zu erreichen. Der zurückgelegte Weg wächst in's Unendliche.

III[ter] Fall: $Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha) < 0$

oder

$$Q + P\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} < 0,$$

daher $\beta > \alpha$ und

$$Q < \frac{P\sin(\beta - \alpha)}{\cos\beta}.$$

Setzt man hier zur Abkürzung

$$\frac{Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{K} = -b^2,$$

so folgt

$$v = b \frac{c - b \tan bkt}{b + c \tan bkt},$$

was sich mit Benutzung von

$$\frac{c}{b} = \tan \gamma$$

eleganter in der Form

$$v = b \tan (\gamma - bkt)$$

geben läſst.

Ferner

$$s = \frac{1}{k} l (\cos bkt + \tan \gamma \sin bkt)$$

und

$$v = \sqrt{(b^2 + c^2) e^{-2ks} - b^2}.$$

Dies lehrt, daſs die Bewegung eine verzögerte ist und daſs der Zug stehen bleibt zu der Zeit

$$t = \frac{1}{bk} \operatorname{arctan} \frac{c}{b},$$

mithin nachdem er den Weg

$$s = \frac{1}{k} l \sec \gamma = \frac{1}{2k} l \left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)$$

zurückgelegt hat.

B. Die Bergfahrt.

Für diese lautet die Differentialgleichung der Bewegung

$$2) \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{gK}{P} \left\{ \frac{Q - P(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{K} - v^2 \right\},$$

und es sind abermals drei Fälle zu unterscheiden.

I^ter^ Fall: $Q - P(\sin \alpha + f \cos \alpha) > 0$

oder

$$Q - P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} > 0 .$$

Wird hier zur Abkürzung

$$\frac{Q - P(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{K} = b^2$$

gesetzt, so folgen für v und s wieder die beim ersten Falle der Thalfahrt gefundenen Gleichungen, in denen nur b jetzt eine andere

Bedeutung hat. Für $c = b$ ist die Bewegung gleichförmig; es gehört hierzu die Zugkraft

$$Q = Kc^2 + P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

II^ter^ Fall: $Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) = 0$

oder

$$Q = P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

Es ergeben sich die bei A II. gefundenen Gleichungen, nebst den aus ihnen gezogenen Folgerungen.

III^ter^ Fall: $Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) < 0$

oder

$$Q - P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} < 0.$$

Bei Benutzung der Abkürzung

$$\frac{Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{K} = -b^2$$

gelangt man zu den unter A III. entwickelten Formeln, mithin auch zu denselben Schlüssen.

D. Gegeben eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t.

Aufgabe 36. Ein materieller Punkt bewegt sich geradlinig in solcher Weise, dafs seine Geschwindigkeit v immer proportional der n^{ten} Potenz der verflossenen Zeit ist, wobei $n \gtrless -1$ vorausgesetzt wird. Zur Zeit Null hat er bereits den Weg a hinter sich; für die Einheit der Zeit ist die Geschwindigkeit gleich k.

Nach welchem Gesetze ist die auf den Punkt wirkende beschleunigende Kraft Q veränderlich, und wie grofs ist der in der Zeit t durchlaufene Weg s?

Lösung. Das für die Veränderlichkeit der Kraft geltende Gesetz lautet

$$Q = knt^{n-1}.$$

Der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist

$$s = a + \frac{k}{n+1}t^{n+1}.$$

Für $k = g$ und $n = 1$ ist die Bewegung der bekannte Fall im luftleeren Raume. (Vergl. Aufg. 3.)

Aufgabe 37. Von einem festen Centrum C wird ein beweglicher materieller Punkt P angezogen. Er bewegt sich in einem widerstehenden Mittel, hat zur Zeit Null den Abstand a von C und zur Zeit t die Geschwindigkeit

$$v = a\alpha^2 e^{-\alpha t} t,$$

in welchem Ausdrucke a und α bekannte Konstanten sind. Man soll bestimmen

I. den zur Zeit t vorliegenden Abstand y vom Centrum C;

II. die beschleunigende Kraft Q (incl. Widerstand) als Funktion von t;

III. ob die Bewegung identisch ist mit einer solchen, bei welcher die Anziehung proportional dem Centrumabstande erfolgt und das Mittel der Geschwindigkeit v proportional widersteht.

Lösung. Ohne Schwierigkeit ergiebt sich

$$y = ae^{-\alpha t}(1 + \alpha t)$$

und

$$Q = a\alpha^2 e^{-\alpha t}(1 - \alpha t).$$

Da die letztere Gleichung sich auf die Form

$$Q = \alpha^2 y - 2\alpha v$$

bringen läfst, so erkennt man, dafs die Bewegung in der That eine von den in der Aufgabe unter III. genannten ist und zwar diejenige, bei welcher α^2 die Beschleunigung der Anziehung für die Einheit des Centrumabstandes und 2α der Widerstand des Mittels für die Einheit der Geschwindigkeit.

Aufgabe 38. In einem widerstehenden Mittel hat ein materieller Punkt eine Bewegung, bei der er zur Erlangung der Geschwindigkeit v immer die Zeit

$$t = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right)$$

braucht, in welchem Ausdrucke c die Geschwindigkeit für $t = 0$ und k derjenige Widerstand, den das Mittel entgegensetzt, wenn $v = 1$ ist. Welcher Art ist die die Bewegung erzeugende be-

schleunigende Kraft Q, d. h. wie läfst sie sich als Funktion der Geschwindigkeit v darstellen?

Lösung. Es wirkt auf den Punkt nur ein dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportionaler Widerstand ($Q = -kv^2$).

Aufgabe 39. Eine auf einen materiellen Punkt wirkende beschleunigende Kraft Q ruft eine Bewegung desselben hervor, bei welcher immer die Zeit

$$t = \frac{1}{2ab} l \frac{1 + av}{1 - av}$$

zur Erwerbung der Geschwindigkeit v notwendig ist.

In welcher Weise hängt Q erstens von t und zweitens von v ab?

Lösung.

$$Q = b \left\{ 1 - \left(\frac{e^{abt} - e^{-abt}}{e^{abt} + e^{-abt}} \right)^2 \right\} = \frac{4b}{(e^{abt} + e^{-abt})^2}$$

und

$$Q = b - a^2 b v^2.$$

Aus der letzten Gleichung ersieht man, dafs die Bewegung durch eine konstante beschleunigende Kraft b erzeugt werden kann, in einem Mittel, welches dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional widersteht und für die Einheit derselben den Widerstand $a^2 b$ leistet.

E. Gegeben eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v und dem zurückgelegten Wege s.

Aufgabe 40. Ein materieller Punkt bewegt sich derartig, dafs seine Geschwindigkeit v immer aus einem konstanten Teile c und aus einem veränderlichen besteht, welcher das k-fache des zurückgelegten Weges s ist, wobei k eine gegebene Konstante bedeutet. Zur Zeit Null ist noch kein Weg durchlaufen.

Nach welchem Gesetze ist die die Bewegung hervorbringende beschleunigende Kraft Q veränderlich? Wie viel Zeit wird zum Zurücklegen des Weges s gebraucht? In welcher Weise hängen v und s von t ab?

Lösung. Es ergeben sich die Gleichungen

$$Q = k(c + ks) = kv = cke^{kt},$$

$$t = \frac{1}{k} l \frac{c + ks}{c},$$

$$v = c e^{kt},$$

$$s = \frac{c(e^{kt} - 1)}{k},$$

welche sehr einfache Gesetze aussprechen.

Aufgabe 41. Das feste Centrum A zieht einen beweglichen Punkt P so an, dafs in jedem Abstande y die Geschwindigkeit v immer ausgedrückt ist durch die Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2c}{b}\, l\, \frac{a(b+y)}{(a+b)y}},$$

in welcher a, b und c bekannte Konstanten sind. Man soll berechnen

I. in welcher Art die beschleunigende Kraft Q von y abhängt;

II. wie sie sich zu derjenigen verhält, welche erzeugt werden würde, wenn eine materielle, von A aus im Sinne der Bewegung sich erstreckende Gerade AB (Querschnitt q, Länge b, Dichtigkeit ε) nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf den Punkt P wirkte.

Lösung. Die beschleunigende Kraft hängt durch die Gleichung

$$Q = \frac{c}{y(b+y)}$$

mit dem Abstande y zusammen. Die Bewegung erfolgt mithin gerade so, als ob eine solche in II. genannte Gerade anzöge und zwar eine, bei welcher das Produkt $kbq\varepsilon$ (also km) den Wert c hat. (Aufg. 137 des I. Teiles.)

Aufgabe 42. Im Abstande y von einem festen anziehenden Mittelpunkte C hat ein Körper, der die Masse 1 besitzt und als Punkt (P) aufgefafst werden darf, die Geschwindigkeit

$$v = \pm \sqrt{2A\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{1}{b}\right)},$$

wobei A, a, b gegebene konstante Gröfsen sind. Zu berechnen ist

I. wie sich die hierbei wirkende beschleunigende Kraft Q durch y ausdrücken läfst;

II. in welchem Zusammenhange die vorliegende Bewegung mit derjenigen steht, welche eintritt, wenn auf den beweglichen Punkt eine materielle Kreislinie, deren Ebene senkrecht zu PC liegt, nach dem Newton'schen Gesetze anziehend wirkt und zwar so, dafs C ihr Mittelpunkt, a ihr

Radius, q ihr Querschnitt, ε ihre Dichtigkeit und b der Abstand ihrer Peripherie von derjenigen Stelle, an welcher P anfänglich in Ruhe ist.

Lösung. Da, wie sich sehr leicht ergiebt,

$$Q = A \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}^3}$$

ist, so erfolgt die Bewegung ganz so, wie sie vor sich gehen würde, wenn nur die Anziehung der in der Aufgabe bezeichneten Kreislinie thätig wäre und das Produkt $2\pi akq\varepsilon$ (vergl. Teil I, Nr. 139] den Wert A hätte.

Aufgabe 43. Nach welchem Gesetze mufs eine an unveränderlicher Stelle C ihren Sitz habende Anziehung Q wirken, wenn ein derselben unterliegender materieller Punkt P, der sich anfänglich im Abstande c in Ruhe befand, in jeder Entfernung y die Geschwindigkeit

$$v = K\sqrt{\sqrt{a^2 + y^2} - y - b + c}$$

(K, a, b konstant) besitzen soll?

Kann die Bewegung erzeugt werden durch eine nach dem Newton'schen Gesetze anziehende Kreisfläche, deren Ebene senkrecht zu PC liegt, deren Mittelpunkt C, deren Radius a, deren Dicke δ, deren Dichtigkeit ε ist und deren Peripherie anfänglich um b von P absteht?

Lösung. Man findet

$$Q = \tfrac{1}{2} K^2 \left(1 - \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right).$$

Die Bewegung kann mithin durch die genannte Kreisfläche erzeugt werden, wenn (vergl. Teil I, Aufg. 149) für letztere $2\pi k\delta\varepsilon = \frac{1}{2} K^2$ ist.

Aufgabe 44. Ein materieller Punkt bewegt sich so, dafs der von ihm zurückgelegte Weg s immer durch die Gleichung

$$s = \frac{1}{2a}\, l\, \frac{b + ac^2}{b + av^2}$$

von der Geschwindigkeit v, ihrem Anfangswerte c und zwei Konstanten a und b abhängt.

Man soll berechnen, welcher Art die beschleunigende (verzögernde) Kraft Q ist, die diese Bewegung hervorruft.

Lösung. Es wirkt ein dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportionaler Widerstand av^2 und, ebenfalls verzögernd, eine konstante Kraft b; man findet nämlich leicht, dafs

$$Q = -b - av^2$$

ist.

Aufgabe 45. Bei der Bewegung eines gewissen Punktes ist der durchlaufene Weg s immer der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit v proportional. Zur Erlangung der Einheit von v wird die Strecke k zurückgelegt. Anfänglich (um die Zeit Null) herrscht die Geschwindigkeit c. Wie grofs ist dieselbe nach Verflufs der Zeit t? Welcher Art ist die beschleunigende Kraft Q? Wie hängt die Bewegung mit der in Aufgabe 3 untersuchten zusammen?

Lösung. Für $n \lessgtr 1$ ist

$$v = \left(c^{n-1} + \frac{n-1}{kn} t\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

und

$$Q = \frac{1}{kn}\left(c^{n-1} + \frac{n-1}{kn} t\right)^{\frac{2-n}{n-1}} = \frac{1}{kn} v^{2-n};$$

für $n = 1$ hingegen

$$v = ce^{\frac{t}{k}}$$

und

$$Q = \frac{c}{k} e^{\frac{t}{k}} = \frac{v}{k};$$

also sind in diesem letzteren Falle v und Q nach geometrischer Progression wachsend.

Für $n = 2$ und $k = \frac{1}{2g}$ geht die Bewegung in den unter Nr. 3 behandelten Wurf über.

Aufgabe 46. In welcher Weise hängt die die Bewegung eines Körpers (Punkt von der Masse 1) hervorrufende beschleunigende Kraft Q von der Geschwindigkeit v und vom Wege s ab, wenn letzterer immer durch die Gleichung

$$s = a\left(1 - e^{-\frac{v^2}{2c}}\right)$$

ausgedrückt ist, in welcher a und c Konstanten sind?

Kann diese Bewegung erzeugt werden durch eine nach einer Seite hin ins Unendliche verlaufende materielle Gerade, die den konstanten Querschnitt q, die unveränderliche Dichtigkeit ε besitzt, nach dem Newton'schen Gesetze anzieht und in deren Richtung, aufserhalb ihrer Masse, der bewegliche Punkt liegt, ursprünglich im Abstande a vom Anfange der Linie sich in Ruhe befindend?

Lösung. Die beschleunigende Kraft ist

$$Q = \frac{c}{a} e^{\frac{v^2}{2c}} = \frac{c}{a - s}.$$

Aus der letzten Form erkennt man, dafs die genannte Gerade die vorliegende Bewegung veranlafst, wenn (siehe Teil I, Nr. 137) das Produkt $kq\varepsilon$ den Wert c hat.

F. Gegeben eine Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege s und der verflossenen Zeit t.

Aufgabe 47. Der in der Zeit t zurückgelegte Weg s ist bei einer gewissen Bewegung gleich $a + bt + \frac{1}{2} ct^2$, wobei a, b und c konstant sind. Wie grofs ist die Geschwindigkeit v und welcher Art die beschleunigende Kraft Q?

Lösung. $v = b + ct$; $Q = c$. Beide Resultate lassen sich leicht in Worte fassen.

Aufgabe 48. Es soll berechnet werden, welche Geschwindigkeit v ein Körper zur Zeit t besitzt, wie sich die beschleunigende Kraft Q als Funktion der Zeit und wie sie sich als solche der Geschwindigkeit und der Zeit herausstellt, wenn der durchlaufene Weg s immer den Wert

$$s = \frac{2a}{b^4} \left(\tfrac{1}{6} b^3 t^3 - \tfrac{1}{2} b^2 t^2 + bt + e^{-bt} - 1\right)$$

hat.

Lösung.

$$v = \frac{2a}{b^3} \left(\tfrac{1}{2} b^2 t^2 - bt + 1 - e^{-bt}\right);$$

$$Q = \frac{2a}{b^2} \left(bt - 1 + e^{-bt}\right);$$

$$Q = at^2 - bv.$$

Die Bewegung wird also erzeugt, wenn eine dem Quadrate der Zeit proportionale beschleunigende Kraft wirkt, die für die Einheit von t gleich a ist; aufserdem aber ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand, welcher für $v = 1$ die Stärke b hat.

Aufgabe 49. In einem widerstehenden Mittel bewegt sich nach einem festen anziehenden Centrum C ein materieller Punkt derartig, dafs der Abstand zur Zeit t immer durch

$$y = \frac{c}{2a} e^{-bt} [(a + b) e^{at} + (a - b) e^{-at}]$$

ausgedrückt wird, wobei a, b und c Konstanten sind.

Wie grofs ist die beschleunigende Kraft Q um diese Zeit? Entsteht die Bewegung vielleicht dann, wenn die Anziehung dem Centrumabstande y proportional erfolgt und der Mittelwiderstand sich in demselben Verhältnisse vermehrt, in welchem die Geschwindigkeit v zunimmt?

Lösung. Zunächst ergiebt sich

$$v = \frac{c}{2a} (b^2 - a^2) e^{-bt} (e^{at} - e^{-at})$$

und

$$Q = \frac{c}{2a} (b^2 - a^2) e^{-bt} [(a - b) e^{at} + (a + b) e^{-at}].$$

Da sich letzteres auf die Form

$$Q = (b^2 - a^2) y - 2bv$$

bringen läfst, so mufs die in der Aufgabe gestellte zweite Frage mit der Bemerkung bejaht werden, dafs $b^2 - a^2$ die für $y = 1$ vorliegende Beschleunigung der Anziehung und $2b$ die Stärke des Widerstandes für die Einheit der Geschwindigkeit ist.

Aufgabe 50. Ein materieller Punkt, der sich in einem nicht widerstehenden Mittel bewegt, befindet sich zur Zeit Null in der Entfernung b von einem festen Centrum C und wird durch dieses so abgestofsen, dafs er zur Erlangung des Abstandes x von demselben immer die Zeit

$$t = \frac{b}{k} \sqrt{x^2 - b^2}$$

braucht, in welchem Ausdrucke k eine bekannte Konstante ist. Berechnet soll werden, welche Geschwindigkeit v der Punkt zur Zeit t

besitzt, welche im Abstande x, welcher Art die Abstofsung ist und was die Konstante k bedeutet.

Lösung.

$$v = \frac{k^2}{b} \cdot \frac{t}{\sqrt{b^4 + k^2 t^2}};$$

und

$$v = \frac{k}{b} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{x}.$$

Ferner

$$Q = \frac{k^2}{x^3}.$$

Die Abstofsung erfolgt also umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung. Für die Einheit der Letzteren ist k^2 ihre Intensität.

G. Gegeben eine Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft Q, der Geschwindigkeit v und der Zeit t, oder zwischen Q, v und dem zurückgelegten Wege s.

Aufgabe 51. Die auf einen Körper (Punkt von der Masse 1) wirkende beschleunigende Kraft ist dem Quadrate der Zeit t proportional und hat für $t = 1$ die Intensität a. Der Mittelwiderstand wächst in demselben Verhältnisse, in welchem die Geschwindigkeit v zunimmt und ist für die Einheit derselben gleich b. Anfangsgeschwindigkeit liegt nicht vor. Wie grofs sind v und s zur Zeit t? Auf welche Weise hängt s von v und t ab?

Lösung. Mit Beachtung des Umstandes, dafs eine Differentialgleichung von der allgemeinen Form

$$\frac{dv}{dt} + Tv + T_0 = 0,$$

in welcher T und T_0 Funktionen von t allein sind, die Integralgleichung

$$v = e^{-\int T dt} \left(Const. - \int T_0 e^{\int T dt} dt \right)$$

liefert, erhält man leicht

$$v = \frac{2a}{b^3} \left(\tfrac{1}{2} b^2 t^2 - bt + 1 - e^{-bt} \right),$$

$$s = \frac{2a}{b^4} \left(\tfrac{1}{6} b^3 t^3 - \tfrac{1}{2} b^2 t^2 + bt + e^{-bt} - 1 \right),$$

$$s = \frac{1}{3b}(at^3 - 3v),$$

welche Ausdrücke mit t fortwährend wachsen.

Aufgabe 52. Ein materieller Punkt P (Masse 1) wird von einem festen Centrum C proportional der Entfernung derartig angezogen, dafs für die Einheit der letzteren die Anziehung den Wert a besitzt. Er bewegt sich in einem Mittel, dessen Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional ist und für $v = 1$ die Intensität b hat. Anfänglich befindet sich der angezogene Punkt in dem Abstande $AC = c$ in Ruhe. Man soll berechnen

I. wie grofs die Geschwindigkeit v ist, wenn sich der Punkt P in dem allgemeinen Abstande $PC = x$ von dem festen Centrum C befindet;

II. mit welcher Geschwindigkeit v_1 der Punkt in C eintrifft;

III. ob das unter I Gefundene auf die erste Gleichung der Lösung der Aufgabe 15 zurückkommt, wenn der Mittelwiderstand verschwindet.

Lösung. Die Geschwindigkeit in dem allgemeinen Abstande x ist

1) $$v = \frac{e^{bx}}{b}\sqrt{\frac{a}{2}\left\{\frac{2bx+1}{e^{2bx}} - \frac{2bc+1}{e^{2bc}}\right\}},$$

oder

2) $$v = \frac{1}{b}\sqrt{\tfrac{1}{2}a\{(2bx+1) - (2bc+1)e^{2b(x-c)}\}};$$

für das Centrum C hat sie den Wert

$$v_1 = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{2}\left\{1 - \frac{2bc+1}{e^{2bc}}\right\}},$$

oder auch

$$v_1 = \frac{1}{be^{bc}}\sqrt{\tfrac{1}{2}a(e^{2bc} - 2bc - 1)}.$$

Verschwindet der Mittelwiderstand, so ist $b = o$; hierfür geben die Gleichungen 1) und 2) zunächst

$$v = \frac{o}{o},$$

also Unbestimmtes. Durch Anwendung der für solche Fälle geltenden Regeln kommt man aber schnell auf

$$v = \sqrt{a(c^2 - x^2)},$$

was mit der Lösung der Aufgabe 15 übereinstimmt.

Aufgabe 53. Durch das Centrum einer Vollkugel ist eine sehr dünne geradlinige Bohrung geführt. In derselben bewegt sich von der Oberfläche aus, ohne Anfangsgeschwindigkeit, ein materieller Punkt, welcher nur der (nach dem Newton'schen Gesetze erfolgenden) Kugelanziehung und einem Mittelwiderstande unterliegt, der der Geschwindigkeit v proportional ist und für die Einheit der letzteren die Intensität n hat.

Man soll, sowohl für bedeutende, als auch für geringe Widerstände, berechnen, in welcher Entfernung y vom Centrum der Punkt sich zur Zeit t befindet und wie grofs zu dieser Zeit seine Geschwindigkeit v ist. Ferner soll man ausführlich ermitteln, welcher Art für grofse und welcher Art für kleine Widerstände die eintretende Bewegung sein mufs.

Lösung. Die Differentialgleichung

$$Q = K(a - s) - nv,$$

in welcher a der Kugelradius, $a - s = y$ der Centrumabstand und K für die Einheit des letzteren die Intensität der Anziehung (Teil I, Lösung der Aufgabe 149), bildet hier den Ausgangspunkt der Rechnung. Bringt man sie auf die Form

1) $$y'' + ny' + Ky = 0,$$

so findet man leicht, dafs

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} \text{ und } y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

zwei partikuläre Integrale sind, wobei

$$\lambda_1 = -\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K}$$

und

$$\lambda_2 = -\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K}.$$

Das allgemeine Integral ist daher

2) $$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$K = k^2,$$
$$\tfrac{1}{2} n = \alpha,$$
$$\sqrt{\alpha^2 - k^2} = \beta,$$

so wird

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta,$$
$$\lambda_2 = -\alpha - \beta.$$

Nun mufs unterschieden werden, ob I., λ_1 und λ_2 reell und verschieden, oder ob sie II., reell und gleich, oder ob sie III., imaginär sind.

I^ter Fall. Wenn der Mittelwiderstand so beschaffen ist, dafs $\left(\frac{n}{2}\right)^2 > K$, also

$$n > 2k,$$

so sind λ_1 und λ_2 reell, aber verschieden.

Dann findet man zunächst

$$y = e^{-\alpha t}(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}),$$

hieraus aber

$$v = e^{-\alpha t}[(\alpha - \beta) C_1 e^{\beta t} + (\alpha + \beta) C_2 e^{-\beta t}];$$

also wenn die Konstanten C_1 und C_2 bestimmt werden,

$$y = \frac{a}{2\beta} e^{-\alpha t} \{(\alpha + \beta) e^{\beta t} - (\alpha - \beta) e^{-\beta t}\}$$

oder, anders geschrieben,

$$y = \frac{a}{2\beta} \left\{\frac{\alpha + \beta}{e^{(\alpha - \beta)t}} - \frac{\alpha - \beta}{e^{(\alpha + \beta)t}}\right\}$$

und

$$v = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta} a e^{-\alpha t} \{e^{\beta t} - e^{-\beta t}\}$$

oder auch

$$v = a \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta} \left\{\frac{1}{e^{(\alpha - \beta)t}} - \frac{1}{e^{(\alpha + \beta)t}}\right\}.$$

II^ter Fall. Für

$$n = 2k$$

liegen reelle, aber gleiche λ_1 und λ_2 vor. Die Gleichung 2) giebt dann nicht unmittelbar das allgemeine Integral von 1), sondern nur ein partikuläres. Setzt man jedoch

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \delta, \text{ also } \lambda_2 = \lambda_1 + \delta,$$

führt dies in 2) ein und läfst schliefslich δ zu Null werden, so ergiebt sich zunächst

$$y = e^{-\alpha t}(B_1 + B_2 t);$$

hieraus

$$v = e^{-\alpha t}[(\alpha B_1 - B_2) + \alpha B_2 t];$$

nach Ermittelnng der Konstanten B_1 und B_2 aber

$$y = a e^{-\alpha t}(1 + \alpha t)$$

und

$$v = a\alpha^2 e^{-\alpha t} t.$$

III^ter Fall. Ist endlich der Widerstand des Mittels so gering, dafs

$$n < 2k,$$

so hat man

$$\lambda_1 = -\alpha + i\beta,$$
$$\lambda_2 = -\alpha - i\beta.$$

Dann liefert die Gleichung 2)

$$y = \{A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t\} e^{-\alpha t},$$

woraus

$$v = \{(\alpha A_1 - \beta A_2) \cos \beta t + (\alpha A_2 + \beta A_1) \sin \beta t\} e^{-\alpha t}$$

folgt. Nach Bestimmung von A_1 und A_2 ergiebt sich schliefslich

$$y = \frac{a}{\beta}(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) e^{-\alpha t},$$

$$v = a \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Die Natur der Bewegung anlangend lehren die gefundenen Gleichungen Folgendes:

I^ter Fall. Der Centrumabstand y wird zwar immer kleiner, doch erst nach unendlich langer Zeit zu Null, nie aber negativ. Schwingungen um den Kugelmittelpunkt finden also nicht statt, während dies bekanntlich der Fall ist, wenn kein Mittelwiderstand vorliegt. (Man vergleiche die Lösung der Aufgabe 15.)

Die Geschwindigkeit v wächst anfänglich und zwar bis sie den Maximalwert

$$v_{max} = a \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta} \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}} \left\{\sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} - \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}}\right\}$$

erreicht hat, was zu der Zeit

$$t = \frac{1}{2\beta} l \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

geschieht; nachher nimmt sie immer ab, doch tritt vollständige Ruhe erst für $t = \infty$ ein.

II^ter Fall. Auch hier wird der Centrumabstand immer geringer, doch erst nach unendlich langer Zeit zu Null. Die Geschwindigkeit wächst, bis sie den Wert

$$v_{max} = \frac{a\alpha}{e}$$

erlangt hat, was für $t = \frac{1}{\alpha}$ eintritt; hierauf wird sie immer kleiner, verschwindet in endlicher Zeit aber nie vollkommen.

Es ist daher auch in diesem zweiten Falle die Bewegung keine schwingende, geht vielmehr nur bis zum Kugelmittelpunkte.

III^ter^ Fall. Hier liegen Schwingungen vor und zwar solche, deren Weiten nach einer geometrischen Progression abnehmen. Die für y gefundene Gleichung giebt nämlich

$$y = a, \quad -ae^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}, \quad +ae^{-\frac{2\alpha\pi}{\beta}}, \quad -ae^{-\frac{3\alpha\pi}{\beta}}, \ldots$$

für bezüglich

$$t = 0, \quad \frac{\pi}{\beta}, \quad \frac{2\pi}{\beta}, \quad \frac{3\pi}{\beta}, \ldots$$

Da, wie man hieraus sieht, diese immer kleiner werdenden Schwingungen in gleichen Zeiten (isochron) vor sich gehen, so wird die Geschwindigkeit stets geringer. Dies lehrt übrigens auch die für v entwickelte Gleichung.

Capitel II.

Aufgaben über die krummlinige Bewegung eines freien Punktes.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Wenn auf einen Punkt von der Masse m, welcher bezogen auf ein rechtwinkliges System die Koordinaten x, y und z hat, beliebig viele Kräfte wirken, die sich zu einer Resultante R oder zu drei Komponenten X, Y und Z, im Sinne der x, y und z, zusammensetzen lassen, so gilt bekanntlich Folgendes:

Die sogenannten Achsengeschwindigkeiten, d. h. die Geschwindigkeiten des Punktes in den Richtungen der drei Koordinatenachsen, sind

$$\text{I)} \qquad v_x = \frac{dx}{dt},$$

$$\text{II)} \qquad v_y = \frac{dy}{dt},$$

$$\text{III)} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Hierbei ist dt, das Differential der Zeit, immer positiv; v_x, v_y und v_z sind es so lange, als die Koordinaten x, y und z wachsen.

Aus I) bis III) folgt auch die Bahngeschwindigkeit v, weil

$$\text{IV)} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

sein mufs.

Für die im Sinne der drei Koordinatenachsen wirkenden Komponenten der Kraft R hat man

$$\text{V)} \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv_x}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dx},$$

$$\text{VI)} \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dv_y}{dt} = mv_y\frac{dv_y}{dy},$$

$$\text{VII)} \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{dv_z}{dt} = m\,v_z\frac{dv_z}{dz}.$$

Die Resultante selbst ist ihrer Gröfse nach bestimmt durch

VIII) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und ihrer Richtung nach durch

IX) $$\cos(R, X) = \frac{X}{R},$$

X) $$\cos(R, Y) = \frac{Y}{R},$$

XI) $$\cos(R, Z) = \frac{Z}{R}.$$

Zerlegt man R, anstatt in drei Seitenkräfte X, Y, Z, in eine zur Bahn tangentiale Komponente T und in eine normale N, so gilt für diese

XII) $$T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2} = mv\frac{dv}{ds}$$

und

XIII) $$N = m\frac{v^2}{\varrho},$$

wobei

XIV) $$v = \frac{ds}{dt}$$

so lange positiv, als s wächst und wobei ferner ϱ der Krümmungshalbmesser der Bahn.

Von Nutzen ist noch folgende Bemerkung:

Aus V) bis VII) folgt (für $m = 1$)

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 2\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{d\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}{dt} = 2\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{dt},$$

XV) $$dv^2 = 2\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Sind nun X, Y, Z die partiellen Differentialquotienten einer Funktion $F\,(x, y, z)$ — der sogenannten Kräftefunktion — so hat man weiter

$$dv^2 = 2\,dF\,(x, y, z),$$

$$v^2 = 2\,F\,(x, y, z) + Const$$

und, wenn man weifs, dafs der Punkt an der Stelle a, b, c die Geschwindigkeit k besitzt,

$$\text{XVI)} \qquad v^2 - k^2 = 2\,F(x, y, z) - 2\,F(a, b, c).$$

Dies ist bekanntlich die Gleichung der lebendigen Kraft für einen freien materiellen Punkt und leicht in Worte zu fassen.

Die vorstehenden Gleichungen reichen aus zur Lösung der Aufgaben des zweiten Kapitels, in denen übrigens, wie früher, immer $m = 1$ vorausgesetzt ist, wenn nicht das Gegenteil gesagt wird.

Wie die Integrationskonstanten zu bestimmen sind, und wie sich die Rechnung vereinfacht, wenn die Bewegung nicht im Raume, sondern in der Ebene erfolgt, ist selbstverständlich.

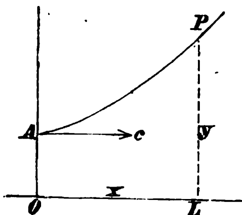
I. Krummlinige Bewegungen in der Ebene.

A. Vorgeschrieben die Art der Bahn, in welcher sich der Punkt bewegen soll, oder die Geschwindigkeiten desselben, oder beides.

a) Bewegungen ohne Widerstand.

Aufgabe 54. Von der Stelle A aus (Fig. 6) wird ein Punkt horizontal mit der Geschwindigkeit c fortgeworfen. Auf ihn wirkt nichts weiter als eine zunächst unbekannte Kraft Y vertikal nach oben (im Sinne der positiven y). Man soll berechnen

Fig. 6.



I. wie dieselbe beschaffen sein mufs, wenn sich der Punkt in der Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

aufwärts bewegen soll;

II. welche Achsengeschwindigkeiten v_x, v_y und welche Bahngeschwindigkeit v an jeder Stelle xy herrschen.

Lösung. Die Gleichung VI) der vorstehenden Zusammenstellung liefert

$$Y = \frac{abc^2}{\sqrt{a^2 + x^2}^3},$$

oder das gleichwertige

$$Y = \frac{b^4 c^2}{a^2} \frac{1}{y^3}.$$

Es mufs also die Kraft Y der dritten Potenz des Abstandes y vom Horizonte OL umgekehrt proportional sein und für $y = 1$ die Intensität $\frac{b^4 c^2}{a^2}$ besitzen.

In horizontaler Richtung ist die Geschwindigkeit konstant, nämlich

$$v_x = c;$$

in vertikaler ist sie

$$v_y = \frac{bc}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{bc}{a} \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{y} = \frac{b^2 c}{a^2} \frac{x}{y};$$

in der Bahn

$$v = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{k^2 x^2 + a^4}{a^2 + x^2}} = \frac{c}{a} \frac{\sqrt{k^2 y^2 - b^4}}{y} = \frac{bc}{a^2 y} \sqrt{k^2 x^2 + a^4},$$

wobei k die lineare Excentricität der Hyperbel bezeichnet.

Aufgabe 55. Welcher Art mufs die Kraft Y sein, welche Bahngeschwindigkeit v hat der Punkt und wie viel Zeit t braucht er, um bis an die Stelle xy zu kommen, wenn das Aufsteigen in der Kettenlinie

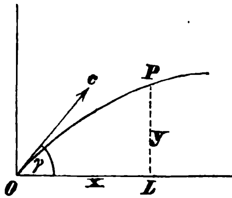
$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

erfolgen soll, übrigens aber die Verhältnisse so sind, wie in der vorigen Aufgabe?

Lösung. Die Kraft Y mufs der erstiegenen Höhe y proportional sein und für $y = 1$ die Intensität $\left(\frac{c}{k}\right)^2$ haben. Die Bahngeschwindigkeit wächst ebenfalls in demselben Verhältnisse, wie die Höhe und ist für die Einheit der letzteren gleich $\frac{c}{k}$. An die Stelle xy kommt der Punkt nach Verlauf der Zeit $\frac{x}{c}$, was man auch ohne Rechnung erkennt.

Aufgabe 56. Mit der Anfangsgeschwindigkeit c und unter dem Winkel γ gegen die x-Achse (Fig. 7) wird ein Punkt vom Koordinatenanfange aus fortgeworfen. Es wirkt auf ihn nichts weiter als eine Kraft Y im Sinne der positiven Ordinaten.

Fig. 7.



Wie mufs dieselbe beschaffen sein, wenn die Bewegung in der vorgeschriebenen Kurve

$$y = f(x)$$

erfolgen soll? Wie grofs ist die Bahngeschwindigkeit v und welche Zeit t ist nötig zur Erreichung der Stelle xy?

Lösung. Man findet leicht

$$Y = c^2 \cos^2 \gamma \, f''(x),$$

wobei $f''(x) = \frac{d^3 y}{dx^2}$.

Ferner

$$v = c \cos \gamma \sqrt{1 + [f'(x)]^2};$$

endlich

$$t = \frac{x}{c \cos \gamma},$$

welches letztere den auch ohne Rechnung einleuchtenden Satz ausspricht, dafs der Punkt sich in horizontaler Richtung gleichförmig bewegt, wie auch die Bahn und die Kraft Y beschaffen sein mögen.

Aufgabe 57. Die Bewegung eines Punktes erfolgt derartig, dafs die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Koordinaten seines Ortes zu jeder Zeit t die Werte

$$x = A\,(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}),$$
$$y = B\,(e^{\beta t} - e^{-\beta t})$$

haben, in welchen Ausdrücken A, B, α und β bekannte Konstanten sind.

Welche im Sinne der positiven x und y wirkenden Kräfte X und Y rufen diese Bewegung hervor?

Lösung. Die Kräfte müssen der Abscisse, bezüglich der Ordinate, proportional sein und für die Einheiten dieser Strecken die Intensitäten α^2, bezüglich β^2, besitzen. ($X = \alpha^2 x$, $Y = \beta^2 y$.)

Aufgabe 58. Es soll sich ein materieller Punkt auf der logarithmischen Spirale

$$r = ae^{\theta}$$

bewegen, und zwar infolge einer nach dem asymptotischen Centrum gerichteten Anziehung R.

In welcher Weise mufs dieselbe von der Entfernung r abhängen, und mit welcher Bahngeschwindigkeit v bewegt sich der Punkt?

Lösung. Die Benutzung der Gleichungen XII) und XIII) der vorstehenden „Zusammenstellung“ führt hier zu den Resultaten

$$R = \frac{k^2}{r^3}$$

und

$$v = \frac{k}{r},$$

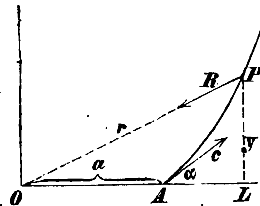
in welchen k denjenigen Leitstrahl bedeutet, für den die Geschwindigkeit der Einheit gleich ist.

Die Anziehung mufs also der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sein. Die Bahngeschwindigkeit nimmt in demselben Verhältnisse zu, in welchem die Radienvektoren kleiner werden.

Aufgabe 59. Von der Stelle A aus (Fig. 8) wird zur Zeit Null unter dem Winkel α ein Punkt mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfen. Er bewegt sich in Folge einer nach dem festen Koordinatenanfange O gerichteten Anziehung derartig, dafs seine Achsengeschwindigkeiten zu jeder Zeit t die Werte

$$v_x = c \cos \alpha \cos kt - ak \sin kt,$$
$$v_y = c \sin \alpha \cos kt$$

Fig. 8.



haben. Man soll diese Bewegung untersuchen, nämlich ermitteln, wo sich der Punkt zur Zeit t befindet, in was für einer Bahn er läuft und wie die Anziehung beschaffen ist.

Lösung. Für die Abscisse des Ortes findet man

$$x = \frac{c \cos \alpha}{k} \sin kt + a \cos kt;$$

für die Ordinate

$$y = \frac{c \sin \alpha}{k} \sin kt.$$

Hieraus folgt zunächst, dafs die Bahn eine Kegelschnittslinie sein mufs. Untersucht man ihre Gleichung

$$(c^2 \sin^2\alpha)\, x^2 + (c^2 \cos^2\alpha + a^2k^2)\, y^2 - (c^2 \sin 2\alpha)\, xy - a^2c^2 \sin^2\alpha = 0$$

nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie, so ergiebt sich, dafs die Kurve eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfange O liegt und deren grofse Achse mit OA einen durch die Gleichung

$$\tan 2\beta = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{c^2 \cos 2\alpha + a^2k^2}$$

bestimmten Winkel β einschliefst.

Ferner findet man für die im Sinne der positiven x wirkende Komponente der beschleunigenden Kraft R:

$$X = -k^2x;$$

für die nach Richtung der positiven y thätige:

$$Y = -k^2y.$$

Daher ist die Anziehung nach dem Centrum O:

$$R = k^2r,$$

also dem Abstande proportional und für die Einheit desselben gleich k^2.

Aufgabe 60. Die Achsengeschwindigkeiten eines Punktes haben an jeder Stelle xy der Bahn die Werte

$$v_x = \sqrt{A + \alpha x^2}^3,$$
$$v_y = \sqrt{B + \beta y^2}^3,$$

in welchen A, B, α und β bekannte positive Konstanten sind. Die Bewegung hat zur Zeit Null im Koordinatenanfange begonnen.

Welcher Art sind die Kräfte X und Y? Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t? In was für einer Linie läuft er?

Lösung. Die wirkenden Kräfte ergeben sich zu

$$X = 3\alpha x\,(A + \alpha x^2)^2 \text{ und } Y = 3\beta y\,(B + \beta y^2)^2;$$

die Koordinaten des Ortes sind

$$x = \frac{A\sqrt{A}t}{\sqrt{1 - A^2\alpha t^2}} \text{ und } y = \frac{B\sqrt{B}t}{\sqrt{1 - B^2\beta t^2}}.$$

Die Bahn hat die Gleichung

$$y = \frac{B\sqrt{B}x}{\sqrt{A^3 + (A^2\alpha - B^2\beta)\,x^2}}.$$

b) Bewegungen mit Widerstand.

Aufgabe 61. Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem kommt einem sich bewegenden Punkte die Bahngleichung

$$y = \frac{g + bk}{ak} x - \frac{g}{k^2} l \frac{a}{a - kx}$$

zu, in welcher a, b, k, g bekannt und unveränderlich sind. Er hat seinen Lauf zur Zeit Null im Koordinatenanfange begonnen und besitzt zu jeder Zeit t im Sinne der positiven x die Geschwindigkeit

$$v_x = ae^{-kt}.$$

Es sollen die Koordinaten x und y des Ortes als Funktionen von t berechnet werden; desgleichen die Geschwindigkeiten v_y und v. Ferner soll man die Natur der diese Bewegung erzeugenden Kräfte X und Y ermitteln; endlich auch untersuchen, wie eine vertikal nach unten (im Sinne der negativen y) gerichtete Kraft und ein nach der Bahntangente wirkender Widerstand beschaffen sein müfsten, um Dasselbe hervorzubringen.

Lösung. Zur Zeit t befindet sich der Punkt an der Stelle

$$x = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$y = \frac{g + bk}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$

und hat die Geschwindigkeiten

$$v_y = \frac{1}{k}[(g + bk) e^{-kt} - g],$$

$$v = \frac{1}{k}\sqrt{a^2 k^2 e^{-2kt} + [(g + bk) e^{-kt} - g]^2}.$$

Die im Sinne der positiven Koordinaten vorhandenen Kräfte sind

$$X = - ake^{-kt} = - kv_x = - kv \cos \tau,$$

$$Y = - (g + bk) e^{-kt} = - kv_y - g = - kv \sin \tau - g.$$

Soll die Bewegung erzeugt werden durch die Wirkung einer in der Richtung der negativen y thätigen Kraft und durch die eines Widerstandes, so mufs erstere gleich g sein, letzterer aber gleich kv, also der Geschwindigkeit proportional. (Wurf im widerstehenden Mittel.)

Aufgabe 62. In einem Mittel, welches proportional dem Quadrate der Bahngeschwindigkeit v derartig widersteht, dafs für $v = 1$

der Widerstand den Wert b besitzt, soll sich ein materieller Punkt auf der logarithmischen Spirale

$$r = a e^{\theta}$$

in Folge einer Anziehung R bewegen, welche nach dem asymptotischen Punkte gerichtet ist. Im Abstande a von demselben soll — und zwar nach innen — die Geschwindigkeit c herrschen. Man verlangt zu wissen

I. in welcher Weise diese Anziehung R von der Entfernung r des anziehenden Centrums abhängt;

II. mit welcher Geschwindigkeit v der Punkt läuft;

III. wie sich die Resultate vereinfachen, wenn der Widerstand gleich Null ist.

Lösung. Die Anziehung ist nach der Gleichung

$$R = k^2 \frac{e^{2\sqrt{2b}\,r}}{r^3} = a^2 c^2 \frac{e^{-2\sqrt{2b}(a-r)}}{r^3}$$

veränderlich und im Abstande r liegt die Geschwindigkeit

$$v = k \frac{e^{\sqrt{2b}\,r}}{r} = a c \frac{e^{-\sqrt{2b}(a-r)}}{r}$$

vor.

Wenn das Mittel nicht widersteht, so hat b den Wert Null, womit die Resultate in die der Lösung der Aufgabe 58 übergehen. (Vergleiche diese.)

Aufgabe 63. Ein schwerer Punkt ist in einem Mittel, welches proportional einer noch nicht bekannten Potenz der Bahngeschwindigkeit v widersteht und für die Einheit von v den Widerstand k leistet, schief in die Höhe geworfen worden. Seine Bewegung wird auf ein Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung O mit dem Anfangspunkte der Bahn zusammenfällt, dessen x-Achse horizontal und dessen y-Achse vertikal liegt. Er läuft so, dafs seine Achsengeschwindigkeit in der Richtung der x immer

$$v_x = A e^{-ks}$$

ist, worin A eine Konstante und s die von O aus gezählte Bahnlänge.

Man soll berechnen, welcher Potenz von v der Widerstand proportional ist.

Lösung. Die eine Differentialgleichung der Bewegung lautet

$$\frac{dv_x}{dt} = -k v^n \frac{dx}{ds}.$$

Da sich nun aus $v_x = Ae^{-ks}$

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv^2\frac{dx}{ds}$$

herleiten läſst, so erkennt man, daſs das Mittel dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional widersteht.

Aufgabe 64. Senkrecht nach oben (im Sinne der positiven y) wirkt auf einen materiellen Punkt eine konstante Kraft K. Auſserdem ist ein Mittelwiderstand W in der Richtung der Bahntangente thätig.

Welche Beziehung muſs zwischen K und W bestehen, wenn das Aufsteigen in der Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

erfolgen soll? Mit welcher Geschwindigkeit v läuft der Punkt in dieser Bahn?

Lösung. Wenn man die Gleichungen XII) und XIII) der am Anfange des Capitels II gegebenen „Zusammenstellung" benutzt und gehörig die einfachen Beziehungen beachtet, welche für die Kettenlinie zwischen der Ordinate y, dem vom Scheitel an gerechneten Bogen s, dem Krümmungshalbmesser ϱ, dem Tangentenwinkel τ u. s. w. bestehen, so findet man leicht

I. daſs der Mittelwiderstand W sich zu der Kraft K verhalten muſs, wie der Bogen s zu dem Doppelten der Ordinate y;

II. daſs die Geschwindigkeit v der Quadratwurzel aus dem Produkte Ky gleich ist.

Aufgabe 65. Das Aufsteigen soll, wie bei der vorigen Aufgabe, in der Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

erfolgen. Statt der konstanten Kraft K aber wirkt eine veränderliche Y; ferner in der Richtung der Bahntangente der Widerstand

$$W = Av^2,$$

wobei A eine bekannte Konstante.

Man soll Y und v als Funktionen von y und s (letzteres vom Scheitel aus gezählt) bestimmen; ferner angeben, wie die Resultate lauten, wenn die Bewegung im nicht widerstehenden Mittel vor sich geht.

Lösung. Auf dem bei der Lösung der vorigen Aufgabe angegebenen Wege gelangt man zu den Ergebnissen

$$Y = Bye^{-2As}$$

und

$$v = \sqrt{By}e^{-As}.$$

Die Integrationskonstante B ist hierbei bestimmt, wenn man für irgend ein y und s entweder v oder Y kennt. Ist z. B. festgesetzt, dafs im Scheitel $v = c$ sein soll, so liefert die zweite Gleichung $B = \frac{c}{k^2}\cdot$

Liegt kein Widerstand vor, so hat man

$$Y = By \text{ und } v = \sqrt{By},$$

also zwei sehr einfache Gesetze.

B. Vorgeschrieben die Kräfte, welche die Bewegung erzeugen.

a) Bewegungen ohne Widerstand.

Aufgabe 66. Unter dem Erhebungswinkel γ (vergl. Fig. 7 bei Aufgabe 56) wird ein Körper (Punkt von der Masse 1) mit der Anfangsgeschwindigkeit c fortgeworfen. Auf denselben wirkt nur die Schwere. Gefragt wird:

I. Welches sind die Werte seiner Geschwindigkeiten in horizontaler Richtung, in vertikaler und in der Bahn selbst, zur Zeit t? Wie ändern sich dieselben und wann erreichen sie ihre gröfsten und kleinsten Werte?

II. Wo befindet sich der Körper zur Zeit t?

III. In was für einer Bahn fliegt er? Wie liegt sie und welches sind die Werte ihrer Bestimmungsstücke?

IV. Wie grofs ist die Wurfweite und wie grofs die Wurfhöhe?

V. Unter welchem Winkel mufs man werfen, wenn die Erstere am gröfsten sein soll? Welches ist ihr Maximalwert und welches der zugehörige der Wurfhöhe?

VI. Für welche Erhebungswinkel sind die Wurfweiten gleich grofs?

VII. Nach wie langer Zeit kommt der Körper im Punkte xy an und in welcher durchfliegt er die ganze Bahn?

Lösung. I. Die Differentialgleichungen der Bewegung liefern zunächst

$$v_x = c \cos \gamma$$
und
$$v_y = c \sin \gamma - gt.$$

Die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung ist hiernach unveränderlich, was man übrigens auch ohne Rechnung erkennt. Senkrecht nach oben hat der Körper, wie die zweite Gleichung lehrt, anfänglich die Geschwindigkeit $c \sin \gamma$. Dieselbe nimmt fortwährend ab, wird zu der Zeit

$$t = \frac{c \sin \gamma}{g}$$

zu Null, ist nachher negativ und nimmt dem absoluten Werte nach mehr und mehr zu.

In der Bahn herrscht die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{c^2 - 2gct \sin \gamma + g^2t^2},$$

also eine solche, welche im Anfange abnimmt, zur Zeit $t = \frac{c \sin \gamma}{g}$ ihr Minimum, nämlich $c \cos \gamma$, erreicht und dann sich wieder vergröfsert.

II. Die Koordinaten des Ortes des Körpers sind

$$x = ct \cos \gamma,$$

was auch ohne Rechnung klar ist, und

$$y = ct \sin \gamma - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Hiernach läfst sich das vorstehende v auch durch

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy}$$

ausdrücken.

III. Als Gleichung der Bahn findet man

$$y = x \tan \gamma - \frac{gx^2}{2c^2 \cos^2 \gamma}$$

oder, wenn mit h die zu c gehörende Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ bezeichnet wird,

$$y = x \tan \gamma - \frac{x^2 \sec^2 \gamma}{4h}.$$

Die Bewegung erfolgt also in einer gemeinen Parabel, deren Achse vertikal steht. Um zu erfahren, wo der Scheitel liegt, welches der Halbparameter ist etc., bringt man die Bahngleichung auf die Form

$$\xi^2 = 2p\eta$$

und erhält hierbei

$$\frac{2c^2 \cos^2\gamma}{g}\left(\frac{c^2 \sin^2\gamma}{2g} - y\right) = \left(x - \frac{c^2 \sin\gamma \cos\gamma}{g}\right)^2.$$

Die Koordinaten des Scheitels sind daher

$$a = \frac{c^2 \sin\gamma \cos\gamma}{g} = \frac{c^2 \sin 2\gamma}{2g} = h \sin 2\gamma$$

und

$$b = \frac{c^2 \sin^2\gamma}{2g} = h \sin^2\gamma.$$

Der Halbparameter ist

$$p = \frac{c^2 \cos^2\gamma}{g};$$

die Entfernung des Brennpunktes vom Horizonte (x-Achse) hat den Wert

$$b_1 = \frac{c^2(\sin^2\gamma - \cos^2\gamma)}{2g} = -\frac{c^2 \cos 2\gamma}{2g}.$$

Die Leitlinie der Parabel liegt wagerecht und in der Höhe

$$h = \frac{c^2}{2g}.$$

Von ihr herunterfallend würde der Körper hiernach seine Anfangsgeschwindigkeit c erlangt haben.

Mit Benutzung von b kann man nun die Bahngeschwindigkeit auch noch durch die Gleichung

$$v = \sqrt{c^2 \cos^2\gamma + 2g(b - y)}$$

ausdrücken, was späterhin wieder gebraucht wird.

IV. Die Wurfweite ist das Doppelte von a; die Wurfhöhe identisch mit b. Die Erstere folgt übrigens auch aus der ursprünglichen Form der Bahngleichung, wenn man y gleich Null nimmt; die Letztere dann aus dem vorstehenden Ausdrucke für die Ordinate des Ortes.

V. Unter 45 Grad kann man am weitesten werfen, nämlich eine Strecke, welche doppelt so lang ist, wie die zur Anfangsgeschwindigkeit c gehörende Geschwindigkeitshöhe h. Hierbei beträgt die Wurfhöhe die Hälfte von h.

VI. Gleiche Wurfweiten liegen für solche Erhebungswinkel vor, welche um gleich viel von 45 Grad abweichen, die also Complementwinkel sind.

VII. Zur Erreichung der Stelle xy braucht der Körper die Zeit

$$t = \frac{x}{c \cos \gamma};$$

zum Durchfliegen der ganzen Bahn

$$T = \frac{2c \sin \gamma}{g}.$$

Aufgabe 67. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit c mufs man werfen (Aufg. 66), um bei dem vorgeschriebenen Erhebungswinkel γ diejenige Stelle zu treffen, deren Koordinaten ξ und η sind?

Lösung. Unter Benutzung der Lösung der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$c = \frac{\xi}{\cos \gamma} \sqrt{\frac{g}{2(\xi \tan \gamma - \eta)}}.$$

Dies enthält die (übrigens selbstverständliche) Bedingung

$$\frac{\eta}{\xi} < \tan \gamma.$$

Für $\frac{\eta}{\xi} = \tan \gamma$ mufs $c = \infty$ sein; für $\frac{\eta}{\xi} > \tan \gamma$ ist es imaginär.

Aufgabe 68. Wie grofs mufs der Erhebungswinkel γ genommen werden (Nr. 66), wenn bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c die Stelle $\xi\eta$ getroffen werden soll?

Lösung. Der Winkel γ ist durch die Gleichung

$$\tan \gamma = \frac{1}{\xi g}\left(c^2 \pm \sqrt{c^4 - 2c^2 g\eta - g^2 \xi^2}\right)$$

bestimmt; oder, wenn man die zu c gehörende Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ einführt, durch

$$\tan \gamma = \frac{1}{\xi}\left[2h \pm \sqrt{4h(h-\eta) - \xi^2}\right].$$

Es giebt daher im Allgemeinen zwei Winkel, unter denen die Stelle $\xi\eta$ getroffen werden kann. Für

$$\xi^2 = 4h(h - \eta)$$

fallen dieselben zusammen; für noch gröfsere ξ ist das Treffen unmöglich.

Man vergleiche hierüber die Lösung der Aufgabe 73.

Aufgabe 69. In welcher Weise mufs von O aus (Fig. 7 bei Nr. 56) geworfen werden (Aufg. 66), wenn die durch die Koordinaten ξ und η gegebene Stelle einer vertikal stehenden Mauer von dem Geschosse unter einem rechten Winkel getroffen werden soll? Wie viel Zeit verstreicht bis zum Auftreffen?

Lösung. Der Erhebungswinkel γ, unter welchem man werfen mufs, ist bestimmt durch

$$tan\,\gamma = 2\,\frac{\eta}{\xi},$$

es mufs also nach einem doppelt so hoch gelegenen Punkte gezielt werden.

Ferner mufs das Geschofs mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{g\,(\xi^2 + 4\,\eta^2)}{2\,\eta}}$$

abfliegen. Dann schlägt es nach der Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2\,\eta}{g}}$$

rechtwinklig ein.

Aufgabe 70. Der geworfene Körper (Aufg. 66) soll nach der vorgeschriebenen Zeit t an der Stelle $\xi\eta$ einschlagen. Unter welchem Erhebungswinkel γ und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit c mufs er von O aus (Fig. 7 bei Nr. 56) fortgeschleudert werden?

Lösung. Der Winkel ist bestimmt durch

$$tan\,\gamma = \frac{2\,\eta + g\,t^2}{2\,\xi};$$

die Anfangsgeschwindigkeit durch

$$c = \frac{\sqrt{4\,\xi^2 + (2\,\eta + g\,t^2)^2}}{2\,t}.$$

Aufgabe 71. Für den in Aufgabe 66 behandelten Wurf soll berechnet werden

I. der Inhalt der von der Bahn einerseits und von dem Horizonte andererseits begrenzten Fläche;

II. derjenige Wert des Erhebungswinkels γ, für welchen dieser Inhalt am gröfsten ist;

III. die Länge s der ganzen (über dem Horizonte liegenden) Bahn;

IV. die für $\gamma = 90^0$ und für $\gamma = 0^0$ aus diesem allgemeinen Werte von s folgenden Bahnlängen s_{90} und s_0.

Lösung. Die gesuchte Fläche ist

$$F = \frac{2c^4 \sin^3\gamma \cos\gamma}{3g^2}$$

und erreicht für

$$\gamma = 60^0$$

ihren Maximalwert, nämlich $\frac{c^4\sqrt{3}}{8g^2}$.

Die Bahn besitzt die Länge

$$s = \frac{c^2}{g}\left(\sin\gamma + \cos^2\gamma \, l\, \frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\right),$$

wofür auch

$$s = \frac{c^2}{g}\left(\sin\gamma + \tfrac{1}{2}\cos^2\gamma \, l\, \frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}\right)$$

geschrieben werden kann.

Setzt man in diesem Ausdrucke $\gamma = 90^0$, so entsteht zunächst $s_{90} = \frac{c^2}{g}(1 + 0\cdot\infty)$, was unbestimmt ist, bei näherer Untersuchung aber

$$s_{90} = \frac{c^2}{g}.$$

Für $\gamma = 0^0$ ergiebt sich sofort

$$s_0 = 0.$$

Das letzte Resultat ist selbstverständlich, das vorhergehende nach der Lösung der vierten Aufgabe bekannt.

Aufgabe 72. Welcher Art ist der geometrische Ort der Scheitel aller derjenigen Wurfparabeln, die beschrieben werden, wenn man materielle Punkte mit lauter verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten, aber immer in derselben Richtung, schief aufwärts wirft?

Lösung. Mit Benutzung der Lösung der Aufgabe 66 findet man leicht, dafs der gesuchte geometrische Ort eine Gerade ist, die durch den Anfangspunkt der Bewegung geht und mit dem Horizonte einen Winkel bildet, dessen Tangente halb so grofs ist wie die des Erhebungswinkels γ.

Aufgabe 73. Von einer und derselben Stelle O aus (Fig. 7 bei Nr. 56) werden in der nämlichen Vertikalebene materielle Punkte

mit gleichen Anfangsgeschwindigkeiten (c), aber unter lauter verschiedenen Winkeln, in die Höhe geworfen. Sie unterliegen nur der Wirkung ihrer Schwere. Berechnet soll werden

I. die Art des geometrischen Ortes der Scheitel aller entstehenden Wurfparabeln;

II. die Natur und die Lage der diese Parabeln einhüllenden Kurve;

III. der geometrische Ort aller derjenigen Stellen, an welchen sich die geworfenen Punkte zu einer und derselben Zeit t befinden;

IV. die allen diesen Punkten in der nämlichen Höhe eigene Bahngeschwindigkeit.

Lösung. Das in der Lösung der 66ten Aufgabe Enthaltene führt auch hier schnell zu den verlangten Resultaten. Zunächst ergiebt sich

$$x^2 = 4y(h - y),$$

(wobei h die zur Anfangsgeschwindigkeit c gehörende Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ ist) als Gleichung des geometrischen Ortes der Scheitel der Wurfparabeln. Da es auf die Form

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y - \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right)^2 = 1$$

gebracht werden kann, so erkennt man, dafs der gesuchte geometrische Ort eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt senkrecht über O in der Höhe $\frac{1}{2}h$ liegt, deren grofse und kleine Achse horizontal, bezüglich vertikal, gerichtet sind und die Längen $2h$, bezüglich h, besitzen.

Als Gleichung der Einhüllenden findet man

$$x^2 = 4h(h - y).$$

Sie ist also eine Parabel, deren Achse vertikal steht, deren Scheitel in der Höhe h über O liegt und deren Halbparameter $2h$, also $\frac{c^2}{g}$ ist.

Der geometrische Ort derjenigen Stellen, an welchen sich die geworfenen Punkte zu der nämlichen Zeit t befinden, besitzt die Gleichung

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 = (ct)^2;$$

er ist also ein mit dem Halbmesser ct beschriebener Kreis, dessen Mittelpunkt im Abstande $\frac{1}{2}gt^2$ senkrecht unter O liegt.

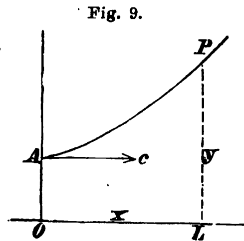
Als Bahngeschwindigkeit v in der Höhe y ergiebt sich für jeden der Punkte

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy};$$

sie ist also für alle Punkte in demselben Abstande vom Horizonte gleich grofs.

Aufgabe 74. Auf einen materiellen Punkt wirkt nichts weiter als vertikal nach oben (im Sinne der positiven y) eine Kraft, welche der Ordinate y (Fig. 9) proportional ist und für die Einheit derselben die Beschleunigung $\frac{c^2}{k^2}$ erteilt. Der Punkt ist anfänglich von A aus, welches die Ordinate k hat, mit der Geschwindigkeit c horizontal fortgeworfen worden. Man soll ermitteln

Fig. 9.



I. seine Geschwindigkeiten v_x, v_y und v an der Stelle xy;

II. den Ort, an welchem er sich zur Zeit t befindet;

III. die Art, die Dimensionen und die Lage der Bahn, in welcher er aufsteigt;

IV. die Geschwindigkeiten v_x, v_y und v, die er zur Zeit t besitzt.

Lösung. Es ergiebt sich durch Benutzung der Gleichungen V) und VI) der am Anfange des Capitels II gegebenen „Zusammenstellung"

$$v_x = c$$

und

$$v_y = \frac{c}{k}\sqrt{y^2 - k^2}.$$

Hieraus aber

$$v = \frac{c}{k}y.$$

In horizontaler Richtung hat der geworfene Punkt also unveränderlich die Anfangsgeschwindigkeit; in der Bahn hingegen eine der Ordinate proportionale, in vertikaler Richtung eine solche, die sich mehr und mehr dem Werthe von v nähert.

Sodann erhält man

$$x = ct$$

und

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{ct}{k}} + e^{-\frac{ct}{k}}\right)$$

als Koordinaten desjenigen Ortes, an welchem sich der geworfene Punkt zur Zeit t befindet.

Die Bahn, in der er fliegt, hat daher die Gleichung

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

ist also eine gemeine Kettenlinie, deren Achse vertikal steht, deren Scheitel in A liegt und deren Parameter gleich k ist.

Wird mit s die Länge des vom Scheitel aus gezählten Bogens dieser Kettenlinie bezeichnet, so nimmt der vorstehende Wert von v_y die Form

$$v_y = \frac{c}{k}s$$

an; es ist also die im Sinne der y herrschende Geschwindigkeit dem zurückgelegten Wege proportional.

Zur Zeit t sind die Geschwindigkeiten

$$v_x = c,$$

$$v_y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{ct}{k}} - e^{-\frac{ct}{k}}\right),$$

$$v = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{ct}{k}} + e^{-\frac{ct}{k}}\right).$$

Anmerkung. Den Wert $v = \frac{c}{k}y$ kann man auch unmittelbar, nämlich durch Benutzung der am Ende der „Zusammenstellung" (Seite 49) erwähnten Gleichung

$$dv^2 = 2\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

erhalten. Es möge diese direkte Herleitungsweise auch bei der Lösung der nachfolgenden Aufgaben gehörige Beachtung finden.

Aufgabe 75. Die auf den geworfenen Punkt wirkende beschleunigende Kraft ist der dritten Potenz der Ordinate umgekehrt proportional und für die Einheit derselben gleich k^2. A liegt in der Höhe h über O. Alles Übrige ist wie bei der vorhergehenden Aufgabe. Die Lösung wird in demselben Umfange verlangt

und mit Angabe der Grenzwerte, welchen sich die Geschwindigkeiten nähern.

Lösung. An der Stelle xy der Bahn ist

$$v_x = c,$$
$$v_y = \frac{k}{h} \cdot \frac{\sqrt{y^2 - h^2}}{y} = k \sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{y^2}},$$
$$v = \frac{1}{h} \cdot \frac{\sqrt{(c^2 h^2 + k^2) y^2 - k^2 h^2}}{y} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{k}{h}\right)^2 - \left(\frac{k}{y}\right)^2}.$$

Für in's Unendliche wachsende Ordinaten nähern sich die beiden letzten Ausdrücke den Grenzwerten $\frac{k}{h}$, bezüglich $\frac{\sqrt{c^2 h^2 + k^2}}{h}$.

Der Ort, an welchem sich der Punkt zur Zeit t befindet, wird durch die Koordinaten

$$x = ct$$

und

$$y = \frac{1}{h} \sqrt{k^2 t^2 + h^4}$$

bestimmt.

Die Bahn besitzt die Gleichung

$$\frac{y^2}{h^2} - \frac{k^2 x^2}{c^2 h^4} = 1,$$

ist also eine Hyperbel, deren Hauptachse mit OA zusammenfällt und die Länge $2h$ hat, deren Scheitel in A liegt und deren Nebenachse die Länge $2 \frac{ch^2}{k}$ besitzt.

Zur Zeit t herrschen die Geschwindigkeiten

$$v_x = c,$$
$$v_y = \frac{k^2}{h} \cdot \frac{t}{\sqrt{k^2 t^2 + h^4}},$$
$$v = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{c^2 h^6 + k^2 (c^2 h^2 + k^2) t^2}{h^4 + k^2 t^2}}.$$

Für $t = \infty$ nähern sich selbstverständlich auch diese Werte von v_y und v den oben angegebenen Grenzen.

Aufgabe 76. Von der Stelle O des Horizontes aus wird ein Punkt mit der Anfangsgeschwindigkeit c unter dem Neigungs-

winkel α in die Höhe geworfen. Es wirkt auf ihn nur eine vertikal nach unten gerichtete Kraft

$$Y = Ce^t,$$

wobei C konstant ist und die Zeit t vom Beginne der Bewegung an gezählt wird.

Berechnet soll werden, wo sich der Punkt zur Zeit t befindet, welche Geschwindigkeiten (v_x, v_y, v) er in diesem Augenblicke hat und in was für einer Bahn er läuft.

Lösung. Man gelangt leicht zu folgenden Resultaten, die auf ein Koordinatensystem bezogen sind, dessen Anfang mit O zusammenfällt, dessen x-Achse horizontal liegt und dessen y-Achse senkrecht nach oben genommen ist:

Koordinaten derjenigen Stelle, an welcher sich der Punkt zur Zeit t befindet:

$$x = ct \cos \alpha,$$

$$y = (c \sin \alpha + C) t + C(1 - e^t);$$

Geschwindigkeiten desselben:

$$v_x = c \cos \alpha,$$

$$v_y = (c \sin \alpha + C) - Ce^t,$$

$$v = \sqrt{c^2 + 2c \sin \alpha \, C(1 - e^t) + C^2 (1 - e^t)^2};$$

Gleichung seiner Bahn:

$$y = \frac{c \sin \alpha + C}{c \cos \alpha} x + C\left(1 - e^{\frac{x}{c \cos \alpha}}\right).$$

Ein Vergleichen mit der Lösung der 88[ten] Aufgabe lehrt, dafs diese Bahn derjenigen ganz ähnlich ist, die der Punkt beschreibt, wenn er bei Einwirkung der Schwere unter sehr kleinem Erhebungswinkel α in einem Mittel geworfen wird, welches proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit widersteht.

Aufgabe 77. Der bewegliche Punkt wird von zwei Kräften beeinflusst; die eine derselben wirkt in horizontaler Richtung und besitzt die unveränderliche Intensität A; die andere ist vertikal nach oben thätig und konstant gleich B. Anfänglich (zur Zeit Null) hat der Punkt sich in Ruhe befunden. Es soll seine Be-

wegung in demselben Umfange untersucht werden, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Lösung. Die Geschwindigkeiten in horizontaler Richtung, vertikal nach oben und in der Bahn sind der verflossenen Zeit proportional, nämlich

$$v_x = At, \quad v_y = Bt, \quad v = \sqrt{A^2 + B^2}\, t.$$

Die Koordinaten des Ortes nehmen zu, wie die Quadrate der Zeiten. Legt man die x-Achse im Sinne der ersten Kraft, die y-Achse in dem der zweiten und nimmt die ursprüngliche Lage des Punktes als Koordinatenanfang, so ist

$$x = \tfrac{1}{2} At^2 \text{ und } y = \tfrac{1}{2} Bt^2.$$

Die Bewegung erfolgt geradlinig und zwar unter dem mit dem Horizonte gebildeten Winkel $\arctan \frac{B}{A}$.

Aufgabe 78. Die Umstände sind dieselben, wie bei der vorigen Aufgabe, doch ist der Punkt anfänglich nicht in Ruhe, sondern besitzt eine Geschwindigkeit c, deren Richtung den Winkel γ mit dem Horizonte einschließt.

Lösung. Wie bei Nr. 77 kommt man auf

$$v_x = At + c \cos\gamma,$$
$$v_y = Bt + c \sin\gamma,$$
$$v = \sqrt{(A^2 + B^2)\, t^2 + 2c\,(A \cos\gamma + B \sin\gamma)\, t + c^2}.$$

Unter Beibehaltung des dort benutzten Koordinatensystems ferner auf

$$x = \tfrac{1}{2} At^2 + ct \cos\gamma,$$
$$y = \tfrac{1}{2} Bt^2 + ct \sin\gamma.$$

Hieraus folgt, unter Benutzung der Abkürzung

$$c\,(A \sin\gamma - B \cos\gamma) = K,$$

als Gleichung der Bahn

$$AB^2x^2 + A^3y^2 - 2A^2Bxy - 2AKcx\sin\gamma + 2AKcy\cos\gamma = 0.$$

Die Bewegung erfolgt also in einer Kegelschnittslinie und zwar, wie die Koeffizienten von x^2, y^2 und xy zeigen, in einer Parabel.

Aufgabe 79. Vom Koordinatenanfange O eines rechtwinkligen Systemes aus wird ein Punkt (zur Zeit Null) mit einer

Anfangsgeschwindigkeit c fortgeworfen, deren Richtung mit der x-Achse den Winkel γ bildet. Es wirken auf ihn im Sinne der positiven x und y zwei Kräfte, welche diesen Koordinaten bezüglich proportional sind und von denen die erste für $x = 1$ die Intensität A^2, die zweite für $y = 1$ die Intensität B^2 besitzt. Man soll berechnen:

I. welche Geschwindigkeit v_x, v_y und v der Punkt an der Stelle xy seiner Bahn hat;

II. wo er sich zur Zeit t befindet;

III. wie grofs v_x, v_y und v zu diesem Augenblicke sind;

IV. in was für einer Bahn die Bewegung erfolgt;

V. welcher Art diese Bahn für $B = A$ ist und welche Geschwindigkeit v in diesem besonderen Falle zur Zeit t herrscht.

Lösung. An der Stelle xy besitzt der Punkt die Geschwindigkeiten

$$v_x = \sqrt{c^2 \cos^2 \gamma + A^2 x^2},$$
$$v_y = \sqrt{c^2 \sin^2 \gamma + B^2 y^2},$$
$$v = \sqrt{c^2 + A^2 x^2 + B^2 y^2}.$$

Zur Zeit t befindet er sich an dem durch die Koordinaten

$$x = \frac{c \cos \gamma}{2A}\left(e^{At} - e^{-At}\right),$$

$$y = \frac{c \sin \gamma}{2B}\left(e^{Bt} - e^{-Bt}\right)$$

bestimmten Orte. Ferner hat er in diesem Momente die Geschwindigkeiten

$$v_x = \tfrac{1}{2} c \cos \gamma \left(e^{At} + e^{-At}\right),$$
$$v_y = \tfrac{1}{2} c \sin \gamma \left(e^{Bt} + e^{-Bt}\right),$$
$$v = \tfrac{1}{2} c \sqrt{\left(e^{At} + e^{-At}\right)^2 \cos^2 \gamma + \left(e^{Bt} + e^{-Bt}\right)^2 \sin^2 \gamma}.$$

Die Bahn ist eine Kurve von der Gleichung

$$y = \frac{c \sin \gamma}{2B}\left\{\left(\frac{Ax + \sqrt{A^2x^2 + c^2\cos^2\gamma}}{c \cos \gamma}\right)^{\frac{B}{A}} - \left(\frac{c \cos \gamma}{Ax + \sqrt{A^2x^2 + c^2\cos^2\gamma}}\right)^{\frac{B}{A}}\right\}.$$

Wird $B = A$, so erfolgt die Bewegung in der Geraden

$$y = x \tan \gamma$$

(nämlich in derjenigen Richtung, in welcher anfänglich geworfen wurde) und zwar mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{2} c (e^{At} + e^{-At}).$$

Aufgabe 80. In der Ecke C_1 eines gleichschenkligen Dreiecks $C_1 C_2 C_3$, welches die Basislänge $C_1 C_2 = 2b$ und die Schenkellänge $b\sqrt{2}$ hat, befindet sich zur Zeit Null ein Punkt P, der die Masse 1 besitzt, in Ruhe. Die Ecken des Dreiecks ziehen ihn dem jedesmaligen Abstande proportional derartig an, daſs für die Einheit der Entfernung die Stärke jeder dieser drei Anziehungen gleich k^2 ist.

Welche Geschwindigkeiten v_x, v_y und v hat der Punkt an den verschiedenen Orten, die er durchläuft? Wo befindet er sich zur Zeit t? Welcher Art ist seine Bahn und die Bewegung in derselben?

Lösung. Wir benutzen ein Koordinatensystem, welches so liegt, daſs die positive Seite der x-Achse die Richtung $C_2 C_1$ hat und eine auf $C_2 C_1$ errichtete, durch C_3 gehende Senkrechte mit der positiven Seite der y-Achse zusammenfällt. Dann wirken auf den beweglichen Punkt, wenn er sich nach Verfluſs der Zeit t an der Stelle xy befindet, die beschleunigenden Kräfte

$$X = -3k^2 x$$

und

$$Y = -k^2 (3y - b).$$

Die Geschwindigkeiten, welche er daselbst hat, sind

$$v_x = \pm k\sqrt{3(b^2 - x^2)},$$
$$v_y = \pm k\sqrt{y(2b - 3y)},$$
$$v = \pm k\sqrt{2by + 3(b^2 - x^2 - y^2)}.$$

Der Stelle, die er zur Zeit t einnimmt, kommen die Koordinaten

$$x = b \cos k\sqrt{3}\, t,$$
$$y = \frac{1}{3} b (1 - \cos k\sqrt{3}\, t) = \frac{2}{3} b \sin^2 \frac{1}{2} k\sqrt{3}\, t$$

zu.

Die Bahn hat die Gleichung

$$y = \frac{1}{3}(b - x).$$

Sie ist also eine durch C_1 gehende Gerade, welche auf der y-Achse die Strecke $\frac{1}{3} b$ abschneidet, fällt daher zusammen mit

der einen Mittellinie des Dreiecks oder, was gleichbedeutend ist, sie geht durch den Schwerpunkt des letzteren.

Durch Verwendung der Bahngleichung ergeben sich noch die Beziehungen

$$v_y = \frac{1}{3} v_x = 0{,}333\ldots v_x,$$

$$v = \frac{\sqrt{10}}{3} v_x = 1{,}054\ldots v_x$$

und

$$v = \sqrt{10}\, v_y = 3{,}162\ldots v_y$$

zwischen den absoluten Werten der drei Geschwindigkeiten.

Dafs die Bewegung auf der Geraden $y = \frac{1}{3}(b - x)$ eine periodische sein mufs, leuchtet ohne Rechnung ein, wird aber auch durch die gefundenen Gleichungen bestätigt. Dieselben lehren nämlich Folgendes:

Der gröfste Wert der Abscisse x ist $+ b$. Er tritt ein zu den Zeiten $0, \frac{2\pi}{k\sqrt{3}}, \frac{4\pi}{k\sqrt{3}}, \ldots$, um welche y zu Null wird.

Der kleinste Wert von x, und zwar $- b$, liegt zu den Zeiten $\frac{\pi}{k\sqrt{3}}, \frac{3\pi}{k\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{k\sqrt{3}}, \ldots$ vor, um welche y bis zu $\frac{2}{3} b$ anwächst.

Die Geschwindigkeit v_x wird zu 0, wenn $x = b$ oder auch $= - b$ ist, erreicht hingegen ihren gröfsten, bezüglich kleinsten Wert, nämlich $\pm k\sqrt{3}\, b$, wenn $x = 0$ ist, also im Schwerpunkte des Dreiecks. Für $x > + b$ und $x < - b$ ergeben sich imaginäre v_x.

Für $y = 0$, oder auch für $y = \frac{2}{3} b$, giebt es senkrecht zur Dreiecksbasis gar keine Geschwindigkeit (v_y); für $y = \frac{1}{3} b$ (im Schwerpunkte) hingegen die gröfste, bezüglich kleinste, und zwar $\pm \frac{1}{3} kb\sqrt{3}$. Daselbst herrscht auch in der Bahn das Maximum (Minimum) der Geschwindigkeit, nämlich $\pm \frac{1}{3} kb\sqrt{30}$.

Aufgabe 81. Um eine unbewegliche kugelförmige Masse m, die man sich im Centrum O derselben koncentrirt denken darf, bewegt sich ein Körper, der als ein mit der Masse 1 versehener Punkt gelten soll. Er hat seinen Lauf an einer Stelle A begonnen, welche von O um a absteht. Seine Anfangsgeschwindigkeit war gleich c und ihre Richtung schlofs mit OA den Winkel α ein. Die Bewegung erfolgt unter alleiniger Wirkung der An-

ziehung des Centralkörpers, welche der Masse m und der jedesmaligen Entfernung r proportional ist.

Berechnet soll werden

I. welche Geschwindigkeiten (v_x, v_y und v) der sich bewegende Körper an den verschiedenen Stellen seiner Bahn und zu verschiedenen Zeiten hat;

II. wo er sich zur Zeit t befindet (wenn dieselbe vom Beginne der Bewegung an gezählt wird);

III. in was für einer Bahn er läuft und wie sie liegt;

IV. welches die ganze Umlaufszeit T ist;

V. wie α und c beschaffen sein müssen, wenn die Bahn zu einem Kreise werden soll, und mit welcher Geschwindigkeit der Körper dann in demselben sich bewegt.

Lösung. Nimmt man die durch OA und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmte Ebene als die rechtwinkliger Koordinaten, OA als x-Achse und O als Anfangspunkt der Abscissen, so sind die beschleunigenden Kräfte

$$X = -k^2 x,$$

$$Y = -k^2 y,$$

wobei $k^2 = \varkappa m$ selbstverständliche Bedeutung hat.

Aus den beiden Differentialgleichungen der Bewegung folgt zunächst

$$v_x = \pm \sqrt{(a^2 k^2 + c^2 \cos^2 \alpha) - k^2 x^2}$$

und

$$v_y = \pm \sqrt{c^2 \sin^2 \alpha - k^2 y^2};$$

daher ist

$$v = \sqrt{(a^2 k^2 + c^2) - k^2 (x^2 + y^2)},$$

womit die Geschwindigkeiten bestimmt sind, welche der Körper an den verschiedenen Stellen seiner Bahn hat.

Die Koordinaten des Ortes, den er zur Zeit t einnimmt, folgen hieraus zu

$$x = \frac{c \cos \alpha}{k} \sin k t + a \cos k t,$$

$$y = \frac{c \sin \alpha}{k} \sin k t.$$

Daher sind die Geschwindigkeiten, welche er um diese Zeit besitzt,

$$v_x = c \cos\alpha \cos kt - ak \sin kt,$$
$$v_y = c \sin\alpha \cos kt,$$
$$v = \sqrt{c^2 \cos^2 kt - 2 ack \cos\alpha \sin kt \cos kt + a^2 k^2 \sin^2 kt}.$$

Als Bahngleichung findet man

$$(c^2 \sin^2\alpha)\, x^2 + (c^2 \cos^2\alpha + a^2 k^2)\, y^2 - (c^2 \sin 2\alpha)\, xy - a^2 c^2 \sin^2\alpha = 0.$$

Der Körper bewegt sich also in einer Kegelschnittslinie und zwar, wie sich bei näherer Untersuchung ihrer Gleichung ergiebt, in einer Ellipse, deren Mittelpunkt nach dem anziehenden Centrum O fällt und deren grofse Achse mit OA einen Winkel β einschliefst, welcher durch

$$\tan 2\beta = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{c^2 \cos 2\alpha + a^2 k^2}$$

bestimmt ist.

Zu einem vollen Umlaufe wird die Zeit

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

gebraucht.

Soll die elliptische Bewegung in eine kreisförmige übergehen, so mufs $\alpha = 90^0$ sein und $c = ak$. Die Bahngeschwindigkeit v ist dann in diesem Kreise unveränderlich, nämlich gleich ak.

Aufgabe 82. Die Anziehung, welche der Centralkörper ausübt, ist der n^{ten} Potenz der Entfernung r proportional und für die Einheit derselben gleich k. Im Übrigen sind die Verhältnisse wie bei der vorigen Aufgabe. Man soll ermitteln, mit welcher Geschwindigkeit der sich bewegende Körper in seiner Bahn läuft, nämlich wie v von r abhängt.

Lösung. Die beiden Differentialgleichungen der Bewegung lauten hier

$$\frac{dv_x}{dt} = -kxr^{n-1},$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -kyr^{n-1},*$$

wobei das Koordinatensystem in der bei der vorhergehenden Lösung angegebenen Lage benutzt worden ist.

* Statt von diesen beiden Gleichungen auszugehen, kann man auch diejenigen Sätze benutzen, welche unter XII und XV der „Zusammenstellung“ am Anfange dieses zweiten Capitels stehen.

Aus denselben folgt, mit Beachtung der Beziehungen

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

und der hierin enthaltenen

$$v\frac{dv}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt},$$
$$rdr = xdx + ydy,$$

für $n \lessgtr -1$:

$$v^2 = c^2 + \frac{2k}{n+1}(a^{n+1} - r^{n+1}),$$

für $n = -1$ hingegen:

$$v^2 = c^2 + 2kl\frac{a}{r}.$$

Die vorletzte dieser Gleichungen giebt für $n = 1$ die in der Lösung der Aufgabe 81 bestimmte Geschwindigkeit; für $n = -2$ diejenige, welche dann vorliegt, wenn die Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt; u. s. w.

Aufgabe 83. Ein Körper (Punkt, Masse 1) wird nach dem festen Centrum O durch eine Kraft R gezogen, deren Intensität

$$R = \frac{K}{r^2} + \frac{K^2}{2r^3}$$

ist, in welchem Ausdrucke K eine gegebene Konstante bedeutet und r den Abstand von O. Die Bewegung beginnt zur Zeit Null an einer Stelle A, welche um a vom Centrum entfernt ist, mit einer Anfangsgeschwindigkeit

$$c = \frac{K}{a\sqrt{2}},$$

deren Richtung auf OA senkrecht steht. Zu berechnen sind

I. die Bahngeschwindigkeit v, welche der Punkt im Abstande r von O besitzt;

II. die Polargleichung und die Form seiner Bahn;

III. die Zeit t, welche er braucht, um bis in die Entfernung r von O zu gelangen.

Lösung. Wir nehmen O als Pol und OA als Achse eines Polarkoordinatensystems; zugleich auch diese Gerade als Abscissenlinie und jenen Punkt als Anfang dazu rechtwinkliger Ordinaten;

beide Systeme aber in der durch OA und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene.

Als Differentialgleichungen der Bewegung ergeben sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{K}{r^2} + \frac{K^2}{2r^3}\right)\frac{x}{r}$$

und

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{K}{r^2} + \frac{K^2}{2r^3}\right)\frac{y}{r}.$$

Durch zweckmäfsiges Umgestalten und Kombiniren lassen sich aus denselben integrirbare Formen herleiten.

Zunächst folgt aus den beiden Gleichungen

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

also

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = A$$

oder, wenn man die Integrationskonstante A bestimmt,

$$xdy - ydx = \frac{K}{\sqrt{2}}\,dt.$$

Bei Benutzung von Polarkoordinaten geht dies über in

$$r^2 d\theta = \frac{K}{\sqrt{2}}\,dt$$

und liefert

$$S = \frac{K}{2\sqrt{2}}\,t,$$

wobei S die Fläche des vom Radiusvektor r beschriebenen Sektors, gerechnet von der Zeit Null an.

Dieser Flächeninhalt ist also der verflossenen Zeit proportional.

Eine andere naheliegende Kombination der beiden Differentialgleichungen der Bewegung gründet sich darauf, dafs

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

also

$$v\frac{dv}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt}$$

ist. Sie giebt

$$-vdv = \frac{1}{r}\left(\frac{K}{r^2} + \frac{K^2}{2r^3}\right)(xdx + ydy).$$

Hieraus folgt, wenn man

$$r^2 = x^2 + y^2$$

beachtet,

$$v^2 = 2\frac{K}{r} + \frac{K^2}{2r^2} + 2B$$

und nach Bestimmung der Integrationskonstante B

$$v^2 = 2K\left(\frac{K}{4r^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

als Quadrat der im Abstande r herrschenden Geschwindigkeit.

Die Polargleichung der Bahn läfst sich hieraus und aus dem vorstehenden

$$r^2 d\theta = \frac{K}{\sqrt{2}} dt$$

herleiten, wenn das bekannte

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{(dr)^2 + (r d\theta)^2}{dt^2}$$

gehörig beachtet wird. Es entsteht zunächst

$$\frac{K^2}{2} \cdot \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2} = 2K\left(\frac{K}{4r^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Dies giebt sodann

$$\theta = \frac{\sqrt{K}}{2} \int \frac{dr}{r\sqrt{r - \frac{r^2}{a}}}$$

und schliefslich

$$r = \frac{aK}{K + a\theta^2}.$$

Hieraus sieht man, dafs sich die Bahn spiralförmig um O herumwindet, diesem Centrum immer näher kommt, es aber nie erreicht. (Asymptotische Annäherung.)

Für die Zeit t, welche der Körper braucht, um sich dem anziehenden Mittelpunkte bis auf die Entfernung r zu nähern, ergiebt sich mit Benutzung vorhergehender Gleichungen zunächst

$$t = \frac{1}{\sqrt{2K}} \int \frac{\sqrt{r}\, dr}{\sqrt{1 - \frac{r}{a}}}$$

und hieraus

$$t = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{2K}}(u + \sin u),$$

wobei

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} u = \frac{r}{a};$$

also, wenn man diesen Wert lieber einsetzt,

$$t = \sqrt{\frac{a}{2K}}\left[\sqrt{r(a-r)} + a \arccos\sqrt{\frac{r}{a}}\right].$$

Aufgabe 84. Die Anziehung, welche das feste Centrum O ausübt, ist irgend eine Funktion der Entfernung $[R = f(r)]$; die Anfangsgeschwindigkeit hat den allgemeinen Wert c und es bildet ihre Richtung mit OA den Winkel α. Alles Übrige ist, wie bei der Aufgabe 83. Auch werden die Koordinatensysteme so angenommen, wie in der vorhergehenden Lösung angegeben worden ist. Man soll, auf demselben Wege wie dort, ermitteln

I. das für die von den Leitstrahlen beschriebenen Flächen geltende Gesetz;

II. die Beziehung zwischen der Anziehung R und der Geschwindigkeit v;

III. die allgemeine Form der Bahngleichung;

IV. unter der Voraussetzung des Bekanntseins der letzteren, den Ausdruck für die beschleunigende Kraft R;

V. die Beziehung zwischen der Zeit t und dem Radiusvektor r;

VI. die zwischen t und der Anomalie θ.

Lösung. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten hier

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -x\frac{f(r)}{r}$$

und

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -y\frac{f(r)}{r}.$$

Aus denselben folgt in der bei der vorhergehenden Lösung angegebenen Weise zunächst

$$xdy - ydx = Adt.$$

Dies giebt, wenn Polarkoordinaten eingeführt werden,

$$1) \qquad r^2 d\theta = Adt,$$

also, unter Beibehaltung der dort benutzten Bezeichnung,

2) $$S = \tfrac{1}{2} A t.$$

Die von den Radienvektoren beschriebenen Flächen sind also bei jeder Centralbewegung den verflossenen Zeiten proportional.

Ferner ergiebt sich

3) $$v^2 = 2\left(B - \int R\,dr\right)$$

als Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der Anziehung. Die Integrationskonstanten A und B, wie auch die noch folgenden, können ebenfalls so bestimmt werden, wie es in der Lösung der Aufgabe 83 geschehen ist.

Auf demselben Wege, wie dort erhält man weiter

4) $$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = 2\left[B - \int f(r)\,dr\right];$$

sodann aus 1) und 4) durch Elimination der Zeit

5) $$\frac{A^2(dr^2 + r^2 d\theta^2)}{r^4 d\theta^2} = 2\left[B - \int f(r)\,dr\right]$$

und hieraus

6) $$A \int \frac{dr}{r\sqrt{2r^2\left[B - \int f(r)\,dr\right] - A^2}} + C = \theta$$

als allgemeine Form der Polargleichung der Bahn.

Die Gleichung 5) liefert sodann

$$\frac{A^2}{2}\left\{\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = B - \int f(r)\,dr,$$

also

$$\int f(r)\,dr = B - \frac{A^2}{2}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^4}\right\}$$

oder

$$\int f(r)\,dr = B - \frac{A^2}{2}\left\{\frac{1}{r^2} + \left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right]^2\right\}$$

und für die beschleunigende Kraft $R = f(r)$:

7) $$R = \frac{A^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right\},$$

welchem Resultate die hübsche symmetrische Form

$$R = \frac{A^2}{r^2}\left\{\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)''\right\}$$

erteilt werden kann.

Als Beziehung zwischen der Zeit t und dem Leitstrahle r findet man, indem man aus 1) und 4) die Anomalie θ eliminirt,

$$8) \quad \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2[B - \int f(r)\,dr] - A^2}} = t + D.$$

Wenn die betreffenden Reduktionen ausführbar sind, so giebt die Gleichung 6)

$$r = \varphi(\theta),$$

und 8) liefert

$$r = \psi(t);$$

hieraus folgt

$$\theta = \chi(t)$$

als Beziehung zwischen Zeit und Anomalie.

Auf dem Wege der Konstruktion kann man übrigens θ auch dadurch bestimmen, dafs man zunächst [nach 6)] die Bahn zeichnet und dann mit r, welches nach 8) berechnet wurde, von O aus einen Kreis beschreibt.

Aufgabe 85. Es sollen die in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe entwickelten Gleichungen 3) und 6) angewendet werden zur Bestimmung der Geschwindigkeit und der Bahngleichung für die in Nr. 83. behandelte Centralbewegung.

Lösung. Ohne Schwierigkeiten gelangt man zu den unter 83 angegebenen Resultaten.

b) Bewegungen mit Widerstand.

Aufgabe 86. Ein schwerer Körper, welcher so beschaffen ist, dafs er als Punkt von der Masse 1 angesehen werden darf, wird unter dem Erhebungswinkel γ mit der Anfangsgeschwindigkeit c in die Höhe geworfen. Das Mittel widersteht proportional der Geschwindigkeit v und derartig, dafs der Widerstand für $v = 1$ die Intensität k hat. Man soll, unter Benutzung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse horizontal liegt, dessen y-Achse senkrecht nach oben gerichtet ist und dessen Ursprung O mit dem Anfangspunkte der Bewegung zusammenfällt, berechnen:

I. die Geschwindigkeiten v_x, v_y und v, welche der Körper zu der vom Beginne der Bewegung an gezählten Zeit t besitzt;
II. die Koordinaten x und y derjenigen Stelle, an welcher er sich zu dieser Zeit befindet;
III. die Grenzen, denen sich v_x, v_y, v, x und y bei ins Unendliche wachsendem t nähern;
IV. die Gleichung der Bahn;
V. diejenige Zeit t_1, welche der Körper braucht, um bis an die höchste Stelle seines Laufes zu gelangen;
VI. die Koordinaten p und q dieser Stelle;
VII. die Wurfweite w und ob dieselbe kleiner, gleich oder gröſser ist, als die doppelte Abscisse der höchsten Stelle der Bahn.

Lösung. Aus naheliegenden Gründen sind hier

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$$

und

$$\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - g$$

die Differentialgleichungen der Bewegung.

Sie liefern

$$v_x = ae^{-kt},$$

$$v_y = \frac{1}{k}[(g + bk)e^{-kt} - g],$$

in welchen Ausdrücken

$$a = c\cos\gamma,$$
$$b = c\sin\gamma$$

als Abkürzungen benutzt sind.

Die Geschwindigkeit in der Bahn ist

$$v = \frac{1}{k}\sqrt{a^2k^2e^{-2kt} + [(g + bk)e^{-kt} - g]^2}.$$

Ferner sind

$$x = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$y = \frac{g + bk}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$$

zur Zeit t die Koordinaten des Ortes des Körpers.

Die Geschwindigkeit v_x nimmt also immer, und zwar nach einer geometrischen Progression, ab; sie nähert sich für ins Unendliche wachsende t dem Werte Null.

Hingegen ist v_y anfänglich positiv, wird dann zu Null, nachher negativ und geht für $t = \infty$ in $-\frac{g}{k}$ über.

Ebenso nähert sich v der Grenze $\frac{g}{k}$; die Bewegung wird also nach und nach einer gleichförmigen immer ähnlicher.

Die Abscisse x geht bei unendlichem t in $\frac{a}{k}$ über; die Ordinate y wird negativ unendlich. Die Bahn hat mithin an der Stelle $x = \frac{a}{k}$ eine vertikale Asymptote.

Als Gleichung der von dem Körper beschriebenen Kurve findet man

$$y = \frac{1}{k}\left(\frac{g + bk}{a} x - \frac{g}{k} l \frac{a}{a - kx}\right).$$

Die Zeit, welche er braucht, um bis an die höchste Stelle zu kommen, ist

$$t_1 = \frac{1}{k} l \frac{g + bk}{g}.$$

Die Koordinaten des Kulminationspunktes sind

$$p = \frac{ab}{g + bk},$$

$$q = \frac{1}{k^2}\left(bk - gl \frac{g + bk}{g}\right).$$

Das q ist die Wurfhöhe; die Wurfweite w ist durch die transcendente Gleichung

$$0 = \frac{g + bk}{a} w - \frac{g}{k} l \frac{a}{a - kw}$$

bestimmt. Für

$$x = 2p = \frac{2ab}{g + bk}$$

geht die Bahngleichung, wenn man statt y lieber η schreibt, über in

$$\eta = \frac{1}{k}\left(2b - \frac{g}{k} l \frac{g + bk}{g - bk}\right).$$

Ist nun $bk > g$, so ist η imaginär, d. h. der Punkt, dessen Abscisse $2p$ ist, liegt gar nicht auf der Bahnkurve. Ist $bk = g$, so wird $\eta = -\infty$, d. h. der Punkt $2p$ fällt mit demjenigen zusammen, durch welchen die vertikale Asymptote geht. Ist endlich $bk < g$, so liefert die letzte Gleichung ein endliches reelles η, von welchem also noch entschieden werden mufs, ob es positiv oder negativ ist. Schreibt man es in der Form

$$\eta = \frac{2g}{k^2}\left(\frac{bk}{g} - \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\frac{bk}{g}}{1-\frac{bk}{g}}\right),$$

so kann man, weil $\frac{bk}{g} < 1$ ist, dafür setzen

$$\eta = \frac{2g}{k^2}\left[-\tfrac{1}{3}\left(\frac{bk}{g}\right)^3 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{bk}{g}\right)^5 - \dots\right];$$

es ist daher

$$\eta < 0,$$

d. h. der Punkt, dessen Abscisse $2p$ ist, liegt unterhalb des Horizontes.

Die Wurfweite w ist mithin jedenfalls kleiner als die doppelte Abscisse des höchsten Punktes der Bahn.

Aufgabe 87. Wie Aufgabe 86, doch ist der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional. Aus den für die Bewegung in horizontaler und vertikaler Richtung geltenden Differentialgleichungen soll Folgendes hergeleitet werden:

I. die Geschwindigkeit v_x als Funktion der Bahnlänge s, letztere von O aus gezählt;

II. eine Gleichung zwischen der goniometrischen Tangente des Tangentenwinkels τ der Bahn und ihrer Länge, also zwischen $\tan \tau = y'$ und s;

III. die Koordinaten x und y des Ortes des geworfenen Körpers als Funktionen von $\tan \tau$;

IV. die Zeit t, vom Beginne der Bewegung an gezählt, als Funktion von y';

V. desgleichen die Geschwindigkeit v.

Lösung. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten hier

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -kv^2 \cos \tau = -kv^2 \frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g - kv^2 \frac{dy}{ds}.$$

Aus der Ersten derselben folgt

$$dv_x = -kv_x ds,$$

daher

$$v_x = c \cos \gamma e^{-ks}.$$

Die Zweite kann in der Form

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - kv_y \frac{ds}{dt}$$

geschrieben werden. Da nun andererseits, wie man bald findet,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y' \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{dy'}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy'}{dt} - kv_y \frac{ds}{dt}$$

ist, so entsteht

$$v_x \frac{dy'}{dt} = -g.$$

Aus dieser Gleichung und aus der obigen für v_x folgt

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{g}{c^2 \cos^2 \gamma} e^{2ks},$$

also, wegen $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$,

$$\sqrt{1 + y'^2}dy' = -\frac{g}{c^2 \cos^2 \gamma} e^{2ks} ds;$$

mithin durch Integration

$$y'\sqrt{1 + y'^2} + l\left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right) = -\frac{g}{kc^2 \cos^2 \gamma} e^{2ks} + C,$$

wobei die Konstante

$$C = \frac{g \sec^2 \gamma}{kc^2} + \tan \gamma \sec \gamma + l(\tan \gamma + \sec \gamma).$$

Hiermit ist der zweite Teil der Aufgabe gelöst.

Die vorstehenden Gleichungen liefern nun

$$x = \frac{1}{k}\int \frac{dy'}{y'\sqrt{1 + y'^2} + l\left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right) - C}$$

und

$$y = \frac{1}{k} \int \frac{y'\,dy'}{y'\sqrt{1+y'^2} + l\,(y' + \sqrt{1+y'^2}) - C}$$

als Koordinaten des Ortes. Hierbei gehen die Integrationen von $\tan\gamma$ bis y'. Da sie jedenfalls, wenn auch nur näherungsweise, ausführbar sind, so erhält man x und y als Funktionen von y', d. h. die Koordinaten der Bahnpunkte für jede beliebige Neigung der Tangente. Die Bahn ist mithin konstruirbar.

Für $y' = 0$ ergiebt sich die Lage ihres Scheitels; für $y = 0$ die Wurfweite.

Man findet ferner, daſs der Erstere nicht senkrecht über der Mitte der Letzteren liegt, sondern weiter, daſs der von ihm aus abwärts gehende Teil der Bahn sich schneller senkt, als der andere ansteigt und daſs er eine vertikale Asymptote besitzt.

Für die Zeit, welche der Körper braucht, um bis an eine durch die Lage der Bahntangente gegebene Stelle zu kommen, erhält man unter Benutzung des Vorhergehenden

$$t = \frac{1}{\sqrt{gk}} \int \frac{dy'}{\sqrt{C - y'\sqrt{1+y'^2} - l\,(y' + \sqrt{1+y'^2})}},$$

wobei die Integration sich ebenfalls von $\tan\gamma$ bis y' erstreckt.

Endlich ergiebt sich

$$v^2 = \frac{g}{k}\,\frac{1+y'^2}{C - y'\sqrt{1+y'^2} - l\,(y' + \sqrt{1+y'^2})}.$$

Dies nähert sich für in's Unendliche wachsende y' der Grenze $\frac{g}{k}$, die Bewegung bekommt also immer gröſsere Ähnlichkeit mit einer gleichförmigen; der Widerstand kv^2 wird gleich g, also gleich dem Gewichte des geworfenen Körpers.

Anmerkung. Von den beiden Differentialgleichungen der Bewegung, welche als Ausgangspunkte der Lösung gedient haben, war die erste zwar leicht, die zweite aber schwer integrierbar. Dies läſst sich vermeiden, wenn man die zweite Komponente der beschleunigenden Kraft nicht in der Richtung der Schwere, sondern in der des Krümmungshalbmessers ϱ der Bahn nimmt. Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{dv_x}{dt} = -\,kv^2\,\frac{dx}{ds},$$

wie vorhin, hingegen, vom Früheren abweichend,

$$\frac{v^2}{\varrho} = g \cos \tau.$$

Wegen $\varrho = -\frac{ds}{d\tau}$ ist dies

$$v^2 \frac{d\tau}{ds} = -g \cos \tau.$$

Da nun die erste dieser Gleichungen nach dem Obigen

$$v_x = c \cos \gamma \, e^{-ks}$$

liefert, also

$$v = c \cos \gamma \frac{e^{-ks}}{\cos \tau},$$

so entsteht

$$\frac{c^2 \cos^2 \gamma}{g} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau} = -e^{2ks} ds,$$

das ist die vorhin auch erhaltene Gleichung

$$\sqrt{1 + y'^2}\, dy' = -\frac{g}{c^2 \cos^2 \gamma} e^{2ks} ds.$$

Nun folgt das früher hieraus Abgeleitete.

Aufgabe 88. Der Wurf erfolgt unter denselben Umständen, wie in der vorigen Aufgabe, jedoch bei so geringem Erhebungswinkel γ, dafs in dem oberhalb des Horizontes gelegenen Bahnteile $\tan^2 \tau$ vernachlässigt, also näherungsweise $ds = dx$ und $s = x$ genommen werden darf.

Man soll, mit Benutzung der in der vorhergehenden Lösung enthaltenen Resultate, bestimmen: die Gleichung der Bahn, die Wurfweite w, die Wurfhöhe h, die Wurfzeit t überhaupt und die zur Erreichung des Scheitels nötige t_1 insbesondere, die Geschwindigkeit v, mit welcher der geworfene Körper fliegt und diejenige v_1, mit der er die höchste Bahnstelle durchläuft.

Lösung. Als Differentialgleichung der Bahn erhält man

$$dy' = -\frac{g}{c^2 \cos^2 \gamma} e^{2kx} dx;$$

hieraus folgt durch Integration

$$y = \frac{1}{(2ck \cos \gamma)^2} \left\{ 2k\,(g + c^2 k \sin 2\gamma)\, x + g\,(1 - e^{2kx}) \right\}.$$

Die Wurfweite ist durch die transcendente Gleichung

$$2k(g + c^2 k \sin 2\gamma) w = g(e^{2kw} - 1)$$

bestimmt.

Für die Wurfhöhe ergiebt sich

$$h = \frac{1}{(2ck\cos\gamma)^2}\left\{(g + c^2 k \sin 2\gamma)\, l\frac{g + c^2 k \sin 2\gamma}{g} - c^2 k \sin 2\gamma\right\}.$$

Zur Erreichung der Bahnstelle xy braucht der geworfene Körper die Zeit

$$t = \frac{1}{ck\cos\gamma}(e^{kx} - 1)$$

und im Scheitel langt er in dem Augenblicke

$$t_1 = \frac{1}{ck\cos\gamma}\left\{\sqrt{\frac{g + c^2 k \sin 2\gamma}{g}} - 1\right\}$$

an.

Seine Geschwindigkeit ist im Allgemeinen

$$v = c\cos\gamma\, e^{-kx}$$

und an der höchsten Stelle der Bahn

$$v_1 = c\cos\gamma\sqrt{\frac{g}{g + c^2 k \sin 2\gamma}}.$$

Aufgabe 89. Auf einen materiellen Punkt, welcher sich zur Zeit Null im Koordinatenanfange O eines rechtwinkligen Systems in Ruhe befindet, wirken zwei konstante Kräfte A und B in der Richtung der positiven x, bezüglich in der der positiven y. Die Bewegung erfolgt in einem Mittel, welches proportional der Geschwindigkeit v und derartig widersteht, dafs die Stärke des Widerstandes für die Einheit von v gleich k ist. Man soll berechnen

I. welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v der Punkt zur Zeit t besitzt und welchen Grenzen sich dieselben nähern;

II. wo er sich zu dieser Zeit befindet;

III. in was für einer Bahn er läuft.

Lösung. Die gesuchten Geschwindigkeiten sind:

$$v_x = \frac{A}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$v_y = \frac{B}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$v = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Sie gehen bei in's Unendliche wachsender Zeit über in $\frac{A}{k}$, bezüglich $\frac{B}{k}$ und $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{k}$; die Bewegung wird also einer gleichförmigen immer ähnlicher.

Für die Koordinaten des Ortes des sich bewegenden Punktes findet man

$$x = \frac{A}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1),$$

$$y = \frac{B}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1);$$

mithin als Gleichung der Bahn

$$y = \frac{B}{A}x.$$

Sonach erfolgt die Bewegung von O aus in einer Geraden, die den Winkel $arctan\ \frac{B}{A}$ mit dem positiven Teile der x-Achse bildet. (Dies kann man ohne Rechnung voraussagen und, falls es geschehen ist, das Ganze als nach Kapitel I gehörend behandeln. Vergl. Nr. 30.)

Aufgabe 90. Wie die vorige Aufgabe, doch liegt eine Anfangsgeschwindigkeit c vor, deren Richtung den Winkel α mit der der positiven Abscissen bildet. Ferner soll sich A zu B verhalten, wie $cos\ \alpha$ zu $sin\ \alpha$. Die Untersuchung der Bewegung wird in demselben Umfange wie bei Nr. 89 verlangt.

Lösung. Man kommt zu den mit dem Vorhergehenden leicht vergleichbaren Resultaten

$$v_x = \frac{A}{k}(1 - e^{-kt}) + c\ cos\ \alpha\ e^{-kt},$$

$$v_y = \frac{B}{k}(1 - e^{-kt}) + c\ sin\ \alpha\ e^{-kt},\ B = A\ tan\ \alpha,$$

$$v = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{k}(1 - e^{-kt}) + c\ e^{-kt},$$

$$x = \frac{A}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1) + \frac{c\ cos\ \alpha}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$y = \frac{B}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1) + \frac{c\ sin\ \alpha}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$y = x\ tan\ \alpha.$$

Sie lehren, dafs auch hier die v_x, v_y und v sich den Grenzen $\frac{A}{k}$, $\frac{B}{k}$, $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{k}$ nähern und dafs auch hier die Bewegung geradlinig erfolgt, nämlich in der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c.

II. Krummlinige Bewegungen im Raume.

A. Vorgeschrieben die Art der Bahn, in welcher sich der Punkt bewegen soll, oder die Geschwindigkeiten desselben, oder beides.

Aufgabe 91. Die Bewegung eines materiellen Punktes erfolgt derartig, dafs die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z seines Ortes immer dem Quadrate der verflossenen Zeit proportional sind, für die Einheit der letzteren aber die Längen a, b, c haben.

In was für einer Bahn läuft er? Mit welchen Achsengeschwindigkeiten und mit welcher Bahngeschwindigkeit? Wie sind die ihn treibenden, im Sinne der positiven Koordinaten wirkenden Kräfte X, Y und Z beschaffen?

Lösung. Die Bahn ist eine durch den Ursprung des Systems gehende Gerade, deren xy- und xz-Projektionen mit der x-Achse die Winkel $arctan \frac{b}{a}$ und $arctan \frac{c}{a}$ bilden.

Die Achsengeschwindigkeiten nehmen zu, wie die Zeiten oder wie die Quadratwurzeln der Koordinaten; es ist nämlich

$$v_x = 2at = 2\sqrt{ax},$$

$$v_y = 2bt = 2\sqrt{by},$$

$$v_z = 2ct = 2\sqrt{cz}.$$

In der Bahn herrscht die Geschwindigkeit

$$v = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t = 2\sqrt{ax+by+cz}.$$

Die Kräfte, denen der Punkt unterliegt, sind konstant und zwar

$$X = 2a, \qquad Y = 2b, \qquad Z = 2c.$$

Aufgabe 92. Die rechtwinkligen Koordinaten eines sich bewegenden Punktes hängen durch die Gleichungen

$$x = a + a_1 t + a_2 e^{-kt},$$
$$y = b + b_1 t + b_2 e^{-kt},$$
$$z = c + c_1 t + c_2 e^{-kt},$$

in denen die a, b und c bekannte konstante Gröfsen sind, von der verflossenen Zeit t ab.

Man soll angeben, welcher Art die Kräfte X, Y, Z sind, die diese Bewegung erzeugen, und welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v der Punkt zur Zeit t besitzt.

Lösung. Zunächst findet man

$$v_x = a_1 - ka_2 e^{-kt},$$
$$v_y = b_1 - kb_2 e^{-kt},$$
$$v_z = c_1 - kc_2 e^{-kt}$$

und hat damit auch $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Wenn die Zeit in's Unendliche wächst, so nähern sich v_x, v_y und v_z den Grenzen a_1, b_1 und c_1; mithin nähert sich v der Grenze $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$; die Bewegung wird also einer gleichförmigen immer ähnlicher.

Für die beschleunigenden Kräfte ergiebt sich

$$X = k^2 a_2 e^{-kt},$$
$$Y = k^2 b_2 e^{-kt},$$
$$Z = k^2 c_2 e^{-kt},$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$X = ka_1 - kv_x,$$
$$Y = kb_1 - kv_y,$$
$$Z = kc_1 - kv_z.$$

Man ersieht hieraus, dafs diese Kräfte immer abnehmen und sich der Grenze Null nähern; ferner, dafs die Bewegung hervorgebracht werden kann, indem man an dem Punkte drei konstante Kräfte ka_1, kb_1, kc_1, deren Richtungen senkrecht auf einander stehen, wirken läfst und zwar in einem Mittel, welches proportional der Bahngeschwindigkeit v derartig widersteht, dafs für $v = 1$ der Widerstand $= k$ ist.

Aufgabe 93. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein irgend wie sich bewegender Punkt in seiner Bahn läuft, ist immer eine Funktion der in der letzteren zurückgelegten Strecke, also $v = f(s)$; welche Zeit t braucht er zum Durchlaufen von s und welche (t_1) speziell dann, wenn $v = (c + s)^n$ ist?

Lösung.

$$t = \int \frac{ds}{f(s)} + Const.,$$

wobei die Konstante so bestimmt werden mufs, dafs für $s = 0$ auch $t = 0$ ist.

Ferner, für $n = 1$,

$$t_1 = l \frac{c + s}{c};$$

hingegen, für $n \gtrless 1$,

$$t_1 = \frac{(c + s)^{1-n} - c^{1-n}}{1 - n}.$$

Aufgabe 94. Im Sinne der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z rückt ein punktartiger Körper mit den Geschwindigkeiten $v_x = L\sqrt{x}$, $v_y = M\sqrt{y}$, $v_z = N\sqrt{z}$ vor, indem er seine Bewegung zur Zeit Null im Anfange des Systems beginnt.

Was für Kräfte X, Y, Z treiben ihn an? Welcher Art ist die Bahn, in der er läuft?

Lösung. Die beschleunigenden Kräfte sind konstant, nämlich $\frac{1}{2}L^2$, $\frac{1}{2}M^2$ und $\frac{1}{2}N^2$.

Die Bahn ist eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade, deren xy- und xz-Projektionen die Winkel $arctan \frac{M^2}{L^2}$, bezüglich $arctan \frac{N^2}{L^2}$, mit der x-Achse einschliefsen.

Aufgabe 95. Zwei der Bahnprojektionen eines Punktes haben, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, die Gleichungen

$$y = Ax,$$
$$z = Bx - C.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher er parallel zur x-Achse sich bewegt, ist

$$v_x = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Der Lauf hat zur Zeit Null an der Stelle abc begonnen.

Man soll das Nähere über die Natur desselben ermitteln; namentlich über die zu allgemeinen Zeiten und an allgemeinen Bahnstellen herrschenden Geschwindigkeiten, über die Art der den Punkt bewegenden Kräfte und über die Orte, an denen er sich zu den verschiedenen Zeiten befindet.

Lösung. Die Bahn ist, wie die gegebenen Gleichungen lehren, eine Gerade, welche durch diejenige Stelle der z-Achse geht, die um C unter dem Koordinatenanfange liegt.

Zur Zeit t befindet sich der Punkt an dem Orte

$$x = a \cos kt,$$
$$y = Aa \cos kt,$$
$$z = Ba \cos kt - C$$

und bewegt sich mit den Geschwindigkeiten

$$v_x = - ak \sin kt,$$
$$v_y = - Aak \sin kt,$$
$$v_z = - Bak \sin kt,$$
$$v = ak \sqrt{1 + A^2 + B^2} \sin kt,$$

in deren Werten $\sin kt$ durch

$$\pm \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\quad \pm \frac{1}{Aa}\sqrt{(Aa)^2 - y^2} \text{ oder } \pm \frac{1}{Ba}\sqrt{(Ba)^2 - (z + C)^2}$$

ersetzt werden kann.

Man erkennt, dafs die Bewegung eine periodische ist, bei welcher die Zeit $\frac{2\pi}{k}$ zu einer ganzen Schwingung gebraucht wird.

Die beschleunigenden Kräfte sind

$$X = - ak^2 \cos kt = - k^2 x,$$
$$Y = - Aa\, k^2 \cos kt = - k^2 y,$$
$$Z = - Bak^2 \cos kt = - k^2 (z + C).$$

Es können also die vorliegenden Bewegungserscheinungen z. B. dadurch erzeugt werden, dafs der Punkt nach dem Koordinatenanfange hin einer Anziehung unterliegt, die dem Abstande r proportional ist, für $r = 1$ aber die Stärke k^2 besitzt und dafs auf ihn aufserdem noch eine im Sinne der negativen z gerichtete Kraft C (etwa seine eigene Schwere) wirkt.

Aufgabe 96. Ein materieller Punkt bewegt sich derartig, dafs

die Horizontalprojektion seiner auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Bahn die Gleichung

$$y = \frac{b}{a} x$$

besitzt. In der Richtung der y-Achse hat er die Geschwindigkeit

$$v_y = \tfrac{1}{2} bk \sin 2kt;$$

in der Richtung seiner Bahn

$$v = \tfrac{1}{2} k \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sin 2kt.$$

Zur Zeit Null befand er sich im Koordinatenanfange O in Ruhe.

Man soll seine Bewegung untersuchen, nämlich ermitteln, welche Achsengeschwindigkeiten v_x und v_z er zur Zeit t besitzt, wo er sich zu dieser Zeit befindet, in was für einer Bahn er läuft, ob und wie seine Bewegung periodisch ist, welcher Art die beschleunigenden Kräfte sind, die sie erzeugen und ob dieselbe vielleicht dadurch hervorgebracht werden kann, dafs der Punkt proportional der Entfernung angezogen wird durch den Koordinatenanfang O und durch drei Punkte A, B, C, von denen A auf der x-Achse um a, B auf der y-Achse um b, C auf der z-Achse um c von O entfernt liegt.

Lösung. Die Achsengeschwindigkeiten v_x und v_z sind

$$v_x = \tfrac{1}{2} ak \sin 2kt,$$
$$v_z = \tfrac{1}{2} ck \sin 2kt;$$

die Koordinaten des Ortes

$$x = \tfrac{1}{4} a\,(1 - \cos 2kt) = \tfrac{1}{2} a \sin^2 kt,$$
$$y = \tfrac{1}{4} b\,(1 - \cos 2kt) = \tfrac{1}{2} b \sin^2 kt,$$
$$z = \tfrac{1}{4} c\,(1 - \cos 2kt) = \tfrac{1}{2} c \sin^2 kt.$$

Die Bahn ist eine von O nach der Stelle abc gerichtete Gerade, denn die Gleichungen ihrer Projektionen lauten

$$y = \frac{b}{a} x, \quad z = \frac{c}{a} x, \quad z = \frac{c}{b} y.$$

Die Bewegung ist eine periodische.

Für $t = 0,\ \frac{\pi}{k},\ 2\frac{\pi}{k},\ 3\frac{\pi}{k}, \ldots$ ist $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$;

für $t = \frac{1}{2}\frac{\pi}{k},\ \frac{3}{2}\frac{\pi}{k},\ \frac{5}{2}\frac{\pi}{k}, \ldots$ ist $x = \frac{1}{2} a,\ y = \frac{1}{2} b,\ z = \frac{1}{2} c$,

und es sind dies die kleinsten, bezüglich die gröfsten Werte, welche die Koordinaten erreichen können.

Zu einer ganzen Schwingung wird die Zeit $T = \frac{\pi}{k}$ gebraucht.

Ferner sieht man, dafs v_x, v_y und v_z gleich 0 sind, für $t = 0$, $\frac{\pi}{k}$, $2\frac{\pi}{k}$, $3\frac{\pi}{k}, \ldots$; jedoch auch für $t = \frac{1}{2}\frac{\pi}{k}$, $\frac{3}{2}\frac{\pi}{k}$, $\frac{5}{2}\frac{\pi}{k}, \ldots$

Die gröfsten und kleinsten Werte von v_x, v_y, v_z und v, nämlich $\pm \frac{1}{2} ak$, $\pm \frac{1}{2} bk$, $\pm \frac{1}{2} ck$, $\pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,k$, treten für $x = \frac{1}{4} a$, $y = \frac{1}{4} b$, $z = \frac{1}{4} c$ ein, das ist zu den Zeiten $t = \frac{1}{4}\frac{\pi}{k}$, $\frac{3}{4}\frac{\pi}{k}$, $\frac{5}{4}\frac{\pi}{k}, \ldots$

Für die beschleunigenden Kräfte findet man

$$X = ak^2 \cos 2\,kt = k^2 (a - 4\,x),$$
$$Y = bk^2 \cos 2\,kt = k^2 (b - 4\,y),$$
$$Z = ck^2 \cos 2\,kt = k^2 (c - 4\,z).$$

Da die von den vier Punkten O, A, B und C ausgeübten Anziehungen auch diese X, Y und Z liefern, wenn für die Einheit der Entfernung die Intensität der Attraktion gleich k^2 ist, so kann die vorliegende Bewegung durch sie erzeugt werden.

B. Vorgeschrieben die Kräfte, welche die Bewegung erzeugen.

Aufgabe 97. Gewisse einen Punkt beeinflussende Kräfte setzen sich zu den im Sinne der positiven Koordinaten wirkenden konstanten $X = A^2$, $Y = B^2$ und $Z = C^2$ zusammen. Die Bewegung beginnt zur Zeit Null vom Ursprunge des rechtwinkligen Systemes aus mit der Geschwindigkeit c, deren Richtung die spitzen Winkel α, β, γ gegen die Achsen bildet.

Welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v herrschen an der Stelle xyz?

Wie viel Zeit braucht der Punkt, um bis hierher zu kommen?

Wo befindet er sich zur Zeit t, und welche Werte haben in diesem Augenblicke die v_x, v_y, v_z und v?

In was für einer Bahn läuft er? Wie ist sie beschaffen für $C = B = A$ und $\gamma = \beta = \alpha$?

Lösung. Man findet zunächst

$$v_x = \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha + 2 A^2 x},$$
$$v_y = \sqrt{c^2 \cos^2 \beta + 2 B^2 y},$$
$$v_z = \sqrt{c^2 \cos^2 \gamma + 2 C^2 z},$$

mithin

$$v = \sqrt{c^2 + 2 (A^2 x + B^2 y + C^2 z)}.*$$

Zur Erreichung der Stelle xyz ist die Zeit

$$t = \frac{1}{A^2}(\sqrt{c^2 \cos^2 \alpha + 2 A^2 x} - c \cos \alpha) = \frac{1}{B^2}(\sqrt{c^2 \cos^2 \beta + 2 B^2 y} - c \cos \beta)$$
$$= \frac{1}{C^2}(\sqrt{c^2 \cos^2 \gamma + 2 C^2 z} - c \cos \gamma)$$

nötig. Zu derselben sind die Koordinaten des Ortes

$$x = (c \cos \alpha)\, t + \tfrac{1}{2} A^2 t^2,$$
$$y = (c \cos \beta)\, t + \tfrac{1}{2} B^2 t^2,$$
$$z = (c \cos \gamma)\, t + \tfrac{1}{2} C^2 t^2,$$

und die Geschwindigkeiten.

$$v_x = c \cos \alpha + A^2 t,$$
$$v_y = c \cos \beta + B^2 t;$$
$$v_z = c \cos \gamma + C^2 t,$$

$$v = \sqrt{c^2 + 2 c (A^2 \cos \alpha + B^2 \cos \beta + C^2 \cos \gamma)\, t + (A^4 + B^4 + C^4)\, t^2}.$$

Alle diese Ausdrücke sprechen ziemlich einfache Gesetze aus.

Die xy-Projektion der Bahn ist eine gemeine Parabel; ihre Gleichung lautet

$$B^4 x^2 + A^4 y^2 - 2 A^2 B^2 xy - 2 c \cos \beta (A^2 c \cos \beta - B^2 c \cos \alpha)\, x$$
$$+ 2 c \cos \alpha (A^2 c \cos \beta - B^2 c \cos \alpha)\, y = 0.$$

In dem in der Aufgabe bezeichneten speciellen Falle ergiebt sich eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade, welche einen Winkel von 45^0 mit der x-Achse einschliefst. Das Analoge gilt für die beiden anderen Projektionen.

Aufgabe 98. Wie Nr. 97; auch in demselben Umfange zu lösen; doch sind die beschleunigenden Kräfte den Koordinaten x, y, z proportional und haben nur für die Einheiten der letzteren die Werte A^2, B^2, C^2.

---

* Nochmals wird auf die am Schlusse von Nr. 74 stehende „Anmerkung“ aufmerksam gemacht.

Lösung. Die Geschwindigkeiten sind dann

$$v_x = \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha + A^2 x^2},$$
$$v_y = \sqrt{c^2 \cos^2 \beta + B^2 y^2},$$
$$v_z = \sqrt{c^2 \cos^2 \gamma + C^2 z^2},$$
$$v = \sqrt{c^2 + A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}.$$

Die Stelle xyz durchläuft der Punkt in dem Augenblicke

$$t = \frac{1}{A}\, l\, \frac{Ax + \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha + A^2 x^2}}{c \cos \alpha},$$

welcher auch bezeichnet werden kann, indem man auf der rechten Seite der Gleichung A, α und x durch B, β und y, bezüglich C, γ und z, ersetzt.

Ferner sind zur Zeit t die Ortskoordinaten

$$x = \frac{c \cos \alpha}{2A}\left(e^{At} - e^{-At}\right),$$

$$y = \frac{c \cos \beta}{2B}\left(e^{Bt} - e^{-Bt}\right),$$

$$z = \frac{c \cos \gamma}{2C}\left(e^{Ct} - e^{-Ct}\right),$$

und es herrschen um dieselbe die Geschwindigkeiten

$$v_x = \tfrac{1}{2} c \cos \alpha \left(e^{At} + e^{-At}\right),$$
$$v_y = \tfrac{1}{2} c \cos \beta \left(e^{Bt} + e^{-Bt}\right),$$
$$v_z = \tfrac{1}{2} c \cos \gamma \left(e^{Ct} + e^{-Ct}\right),$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Für die Bahn findet man

$$y = \frac{c \cos \beta}{2B}\left(\xi^{\frac{B}{A}} - \xi^{-\frac{B}{A}}\right)$$

als Gleichung der xy-Projektion und

$$z = \frac{c \cos \gamma}{2C}\left(\xi^{\frac{C}{A}} - \xi^{-\frac{C}{A}}\right)$$

als solche des xz-Risses, wenn zur Abkürzung

$$\frac{Ax + \sqrt{A^2 x^2 + c^2 \cos^2 \alpha}}{c \cos \alpha} = \xi$$

gesetzt wird.

Für den am Schlusse der Aufgabe 97 erwähnten besonderen Fall geht auch hier die Bahn in eine geradlinige über, welche die Gleichungen $y = x$ und $z = x$ besitzt. Dieses Resultat ergiebt sich sofort auch ohne Rechnung aus der Natur der Sache.

Aufgabe. 99. Zur Zeit Null befindet sich ein materieller Punkt an der Stelle abc eines rechtwinkligen Koordinatensystems in Ruhe. Er unterliegt seiner eigenen Schwere, die im Sinne der negativen z wirkt, und einer Anziehung nach dem Koordinatenanfange, welche dem Abstande r von demselben proportional ist und für $r = 1$ die Stärke k^2 hat.

Man soll (in passender Reihenfolge) berechnen, welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v zur Zeit t und an der Stelle xyz vorliegen; wie lange es dauert, bis der sich bewegende Punkt hier her kommt; welches um die Zeit t die Koordinaten seines Ortes sind; in was für einer Bahn er läuft; ob die Bewegung periodisch ist und in welcher Weise.

Lösung. Nach Verfluſs der Zeit t herrschen die Geschwindigkeiten

$$v_x = - ak \sin kt,$$

$$v_y = - bk \sin kt,$$

$$v_z = - \frac{g + ck^2}{k} \sin kt,$$

$$v = - \frac{1}{k} \sqrt{(a^2 + b^2) k^4 + (g + ck^2)^2} \sin kt$$

oder, wenn mit r_0 der ursprüngliche Abstand des Punktes vom Koordinatenanfange bezeichnet wird,

$$v = - \frac{1}{k} \sqrt{k^4 r_0^2 + g^2 + 2 cgk^2} \sin kt.$$

An der Stelle xyz haben sie die Werte

$$v_x = \pm k \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$v_y = \pm k \sqrt{b^2 - y^2},$$

$$v_z = \pm \sqrt{k^2 (c^2 - z^2) + 2 g (c - z)}$$

oder, was mit den beiden vorhergehenden Ausdrücken besser übereinstimmt,

$$v_z = \pm k \sqrt{\left(\frac{g + ck^2}{k^2}\right)^2 - \left(z + \frac{g}{k^2}\right)^2}$$

und endlich

$$v = \pm \sqrt{k^2 (r_0^2 - r^2) + 2g(c - z)},$$

welches letztere sehr leicht auf noch andere Formen gebracht, nämlich durch x, y oder z allein ausgedrückt werden kann.

Ferner ist

$$t = \frac{1}{k} \, arc \cos \frac{x}{a} = \frac{1}{k} \, arc \cos \frac{y}{b} = \frac{1}{k} \, arc \cos \frac{g + k^2 z}{g + k^2 c}$$

diejenige Zeit, zu welcher sich der Punkt an der Stelle xyz befindet.

Die Koordinaten der Letzteren haben, ausgedrückt durch die Erstere, die Werte

$$x = a \cos kt,$$
$$y = b \cos kt,$$
$$z = \frac{1}{k^2}\{(g + ck^2) \cos kt - g\}.$$

Mithin sind

$$y = \frac{b}{a} x,$$
$$z = \frac{g + ck^2}{ak^2} x - \frac{g}{k^2},$$
$$z = \frac{g + ck^2}{bk^2} y - \frac{g}{k^2}$$

die Gleichungen der drei Projektionen der Bahn. Dieselbe ist also eine Gerade, von dem Anfangspunkte abc nach derjenigen Stelle der z-Achse gerichtet, welche um $\frac{g}{k^2}$ unter dem Koordinatenanfange liegt.

Die vorstehenden Resultate lassen die Bewegung als eine periodische erkennen und zwar als eine solche, bei welcher x, y und z gleich a, b und c sind zu den Zeiten 0, $2\frac{\pi}{k}$, $4\frac{\pi}{k}$, $\cdots$; hingegen gleich 0, 0 und $-\frac{g}{k^2}$, für $t = \frac{1}{2}\frac{\pi}{k}$, $\frac{3}{2}\frac{\pi}{k}$, $\frac{5}{2}\frac{\pi}{k}$, $\cdots$; endlich gleich $-a$, $-b$ und $-\frac{ck^2 + 2g}{k^2}$, wenn $t = \frac{\pi}{k}$, $3\frac{\pi}{k}$, $5\frac{\pi}{k}$, $\cdots$

Die Dauer einer ganzen Schwingung ist also

$$T = 2\frac{\pi}{k}.$$

Die Geschwindigkeit in der Bahn geht von Null bis

$$V = \pm \frac{1}{k} \sqrt{(a^2+b^2)k^4+(g+ck^2)^2} = \pm \frac{1}{k} \sqrt{k^4 r_0{}^2 + 2cgk^2 + g^2}.$$

Aufgabe 100. In der Spitze O einer dreiseitigen Pyramide $OABC$, welche die Kantenlängen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und bei O eine rechtwinklige Ecke hat, befindet sich zur Zeit Null ein materieller Punkt in Ruhe. Er wird von den vier Ecken O, A, B, C proportional der Entfernung und zwar derartig angezogen, dafs für die Einheit der letzteren die Stärke der Attraktion gleich k^2 ist.

Es soll (in geschickter Folge) erforscht werden, wo sich der Punkt zu der Zeit t befindet, in was für einer Bahn er läuft, welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v er an der Stelle xyz und um die Zeit t besitzt, ob die Bewegung periodisch ist und wie.

Lösung. Auf ein System bezogen, dessen x-Achse OA, dessen y-Achse OB und dessen z-Achse OC ist, sind die Koordinaten des Ortes zur Zeit t

$$x = \tfrac{1}{2}\, a \sin^2 kt,$$
$$y = \tfrac{1}{2}\, b \sin^2 kt,$$
$$z = \tfrac{1}{2}\, c \sin^2 kt.$$

Hiernach erkennt man die Bahn als eine von O nach abc gerichtete Gerade.

An der Stelle xyz herrschen die Geschwindigkeiten

$$v_x = \pm k \sqrt{2x(a-2x)},$$
$$v_y = \pm k \sqrt{2y(b-2y)},$$
$$v_z = \pm k \sqrt{2z(c-2z)},$$
$$v = \pm k \sqrt{2[(ax+by+cz)-2(x^2+y^2+z^2)]}.$$

Die Letzte derselben kann auch leicht durch x, y oder z allein ausgedrückt werden, nämlich

$$v = \pm \frac{k}{a} \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a-2x)x}$$

und, in ganz entsprechender Weise, v als Funktion von y, oder als solche von z.

Um die Zeit t besitzen die Geschwindigkeiten die Werte

$$v_x = \tfrac{1}{2} a k \sin 2kt,$$
$$v_y = \tfrac{1}{2} b k \sin 2kt,$$
$$v_z = \tfrac{1}{2} c k \sin 2kt,$$
$$v = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, k \sin 2kt.$$

Aus diesen Resultaten erhellt, dafs die Bewegung eine periodische ist. Null und $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ sind die kleinsten, bezüglich die gröfsten Werte, welche die Koordinaten x, y, z erreichen können; die kleinsten treten ein zu den Zeiten $0, \frac{\pi}{k}, 2\frac{\pi}{k}, 3\frac{\pi}{k}, \ldots$; die gröfsten um $\frac{1}{2}\frac{\pi}{k}, \frac{3}{2}\frac{\pi}{k}, \frac{5}{2}\frac{\pi}{k}, \ldots$.

Es ist daher $\frac{\pi}{k}$ die Dauer einer ganzen Schwingung.

Die Maximal- und Minimalwerte von v_x, v_y, v_z und v sind bezüglich $\pm \frac{1}{2}ak$, $\pm \frac{1}{2}bk$, $\pm \frac{1}{2}ck$, $\pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, k$. Sie liegen vor zu den Zeiten $\frac{1}{4}\frac{\pi}{k}, \frac{3}{4}\frac{\pi}{k}, \frac{5}{4}\frac{\pi}{k}, \ldots$, d. i. dann, wenn $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{1}{4}b$, $z = \frac{1}{4}c$ ist.

Zu Null werden diese Geschwindigkeiten für

$$t = 0, \tfrac{1}{2}\frac{\pi}{k}, \tfrac{2}{2}\frac{\pi}{k}, \tfrac{3}{2}\frac{\pi}{k}, \ldots.$$

Aufgabe 101. Drei konstante Kräfte A, B, C, welche auf einander senkrecht stehen, beeinflussen einen materiellen Punkt, der anfänglich die Geschwindigkeit v_0 unter den Winkeln λ, μ, ν zu A, B, C besitzt. Das Mittel, in welchem er sich bewegt, widersteht der Geschwindigkeit proportional und derartig, dafs für die Einheit derselben der Widerstand gleich k ist.

Die Koordinaten x, y, z des Ortes, die Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v und der letzteren Grenzwerte, sollen als Funktionen der vom Bewegungsbeginne an gezählten Zeit t berechnet werden und zwar bei Zugrundelegung eines Systems, für welches die Richtungen der Achsen der x, y und z zusammenfallen mit denen der Kräfte A, B und C.

Lösung. Man gelangt leicht zu folgenden Resultaten, in denen zur Abkürzung $v_0 \cos \lambda$ mit α, $v_0 \cos \mu$ mit β, $v_0 \cos \nu$ mit γ bezeichnet wurde:

$$x = \frac{1}{k^2} \{Akt + (A - k\alpha)(e^{-kt} - 1)\},$$

$$y = \frac{1}{k^2} \{Bkt + (B - k\beta)(e^{-kt} - 1)\},$$

$$z = \frac{1}{k^2} \{Ckt + (C - k\gamma)(e^{-kt} - 1)\},$$

$$v_x = \frac{1}{k} \{A - (A - k\alpha) e^{-kt}\},$$

$$v_y = \frac{1}{k} \{B - (B - k\beta) e^{-kt}\},$$

$$v_z = \frac{1}{k} \{C - (C - k\gamma) e^{-kt}\},$$

womit auch $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ bestimmt ist.

Die Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z und v nähern sich, wenn t in's Unendliche wächst, den Grenzen $\frac{A}{k}$, $\frac{B}{k}$, $\frac{C}{k}$, $\frac{1}{k}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; die Bewegung wird also einer gleichförmigen immer ähnlicher.

Capitel III.

Aufgaben über die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebenen festen Bahnen.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Die Bewegung eines Punktes auf einer vorgeschriebenen festen (unveränderlichen, starren) Linie oder Fläche läfst sich auf eine freie Bewegung desselben zurückführen, wenn man den Widerstand, welchen die Linie oder Fläche leistet, durch eine Normalkraft ersetzt. Es gelten dann eben die für freie Bewegung bekannten Sätze und Gleichungen. (Man vergleiche die „Zusammenstellung" zu Cap. II.)

I. Bewegung auf einer ebenen festen Linie.

A. Ohne Widerstand.

Aufgabe 102. Auf einer in einer Vertikalebene liegenden Kurve (Fig. 10), deren Gleichung

$$x = f(z)$$

gegeben ist, rollt ein materieller Punkt infolge der alleinigen Wirkung der Schwere herab. Er beginnt seine Bewegung zur Zeit Null an einer Stelle A, deren z den Wert h besitzt, mit der Anfangsgeschwindigkeit c. Man soll

I. seine Bahngeschwindigkeit v als Funktion von z bestimmen, mit besonderer Berücksichtigung des Falles $c = 0$;

II. diejenige Zeit t, welche er braucht, um bis zur Höhe z herabzurollen;

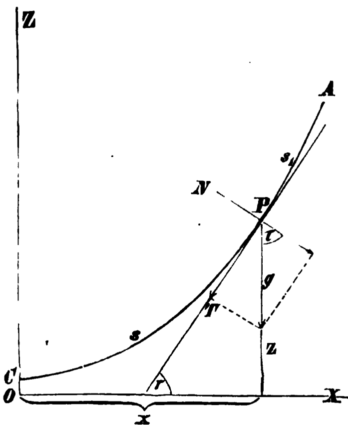


Fig. 10.

III. soll man angeben, wie sich z, x, v, die Tangentialkraft T und der Druck D, welchen die Kurve erleidet, als Funktionen der Zeit t berechnen lassen.

Lösung. I. Denkt man sich den von der Kurve geleisteten Widerstand durch eine Normalkraft N ersetzt, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N \sin \tau = -N\frac{dz}{ds},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = N \cos \tau - g = N\frac{dx}{ds} - g,$$

wobei unter s der von der z-Achse aus gezählte Bogen verstanden ist.

Durch Elimination der Normalkraft N und mit Beachtung von

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

folgt hieraus

1) $$v = \pm\sqrt{c^2 + 2g(h-z)}.$$

Diese Gleichung lehrt, dafs die Geschwindigkeit v des Punktes ganz unabhängig ist von der Natur derjenigen Kurve, auf welcher er herabrollt, dafs sie vielmehr nur von der Höhe $h - z$ abhängt. Der Punkt erlangt also, wenn er auf irgend einer vertikalen Plankurve durch irgend eine Höhe herabrollt, dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er diese Höhe frei durchfällt.

Für $c = 0$ ist

$$v = \pm\sqrt{2g(h-z)},$$

mithin die Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der durchrollten Höhe proportional.

Die Gleichung 1) kann übrigens auch — und schneller — dadurch gefunden werden, dafs man g in eine normale und in eine tangentiale Komponente (T) zerlegt.

II. Diejenige Zeit t, welche verstreicht, bis der Punkt zur Höhe z herabrollt, folgt aus 1) und aus

$$v = -\frac{ds}{dt} = -\frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{dt} = -\frac{\sqrt{1 + f'(z)^2}}{dt}dz$$

leicht zu

2) $$t = \mp\int\sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{c^2 + 2g(h-z)}}\,dz + Const.$$

Sie ist also (im Gegensatze zu v) von der Art der Kurve abhängig.

III. Aus 2) folgt

$$t = \varphi(z),$$

also, wenn diese Gleichung nach z lösbar ist,

$$z = \psi(t),$$

daher

$$x = f[\psi(t)]$$

und

$$v = \pm\sqrt{c^2 + 2g[h - \psi(t)]}.$$

Sodann hat man für die Tangentialkraft

$$T = g \sin\tau = g\frac{dz}{ds}.$$

Endlich ist der Druck D, welchen die Kurve erleidet, die Resultante zur Normalkomponente der Schwere, d. i. zu $g \cos\tau = g\frac{dx}{ds}$, und zur Centrifugalkraft $\frac{v^2}{\varrho}$.

Diese Ausdrücke sind, unter Benutzung der vorhergehenden Gleichungen, schliefslich ebenfalls als Funktionen von t darstellbar.

Aufgabe 103. Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t und wie grofs ist um diese Zeit seine Geschwindigkeit v, wenn die Kurve, auf welcher er herabrollt, die Gleichung

$$9g^2(x + a)^2 = (c^2 + 2gh - 1 - 2gz)^3$$

hat, alles Übrige aber so ist, wie bei der vorhergehenden Aufgabe?

Lösung. Wenn man zunächst — nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie und der Differentialrechnung — die Kurvenform untersucht, so bemerkt man gelegentlich mit, dafs

$$c \geq 1$$

sein mufs, falls das Herabrollen aus beliebig vorgeschriebenem h möglich sein soll. Ist nämlich $c < 1$, so ergiebt sich das gröfste z der Linie kleiner als h, so dafs dann die letztere gar nicht bis zu dem Anfangspunkte der Bewegung (A in Fig. 10) hinaufreicht.

Auf dem in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe eingeschlagenen Wege findet man

$$z = h - t$$

als diejenige Höhe, in welcher sich der rollende Punkt zur Zeit t befindet; ferner

$$v = \sqrt{c^2 + 2gt}$$

als die in diesem Augenblicke herrschende Geschwindigkeit.

Aufgabe 104. Im Allgemeinen wie Nr. 102. Die Gleichung der Bahn ist

$$g^2(x + b)^2 + 2gz - (c^2 + 2gh - 1) = 0,$$

wobei a der Abstand des Bewegungsanfanges A von der z-Achse. Der Ort und die Geschwindigkeit des Punktes sollen als Funktionen der Zeit t berechnet werden.

Lösung. Die Bahngleichung lehrt, dafs man es mit einer gemeinen Parabel zu thun hat und dafs auch hier $c \geqq 1$ sein mufs, wenn für ein beliebig vorgeschriebenes h der Anfangspunkt A auf der Bahn liegen soll.

Für die Koordinaten des Ortes des Punktes erhält man

$$x = a + t,$$

$$z = \frac{1}{2g}(c^2 + 2gh - 1) - \tfrac{1}{2} g(a + b + t)^2;$$

für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{1 + g^2(a + b + t)^2}.$$

Aufgabe 105. Die Gleichung der Bahn, auf welcher ein schwerer Punkt herabrollt, sei

$$y = \tfrac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{x^5}{a}}$$

bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x-Achse vertikal abwärts gerichtet ist. Die Bewegung beginne ohne Anfangsgeschwindigkeit im Ursprunge des Systems, und es wirke nur die Schwere.

Die Geschwindigkeit v, die Abscisse x und der von der Bahn erlittene Druck D sollen durch die Zeit t ausgedrückt werden.

Lösung. Der in den vorhergehenden Lösungen benutzte Weg führt zunächst auf die Gleichung

$$\int \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{x}{a}}}{x}}\, dx = \sqrt{2g}\, t + Const.$$

Durch Anwendung der Substitutionen

$$1 + \sqrt{\frac{x}{a}} = \xi, \text{ oder } \sqrt{\frac{x}{a}} = \eta$$

folgt hieraus sehr leicht

$$x = a\left\{\sqrt[3]{(1+kt)^2} - 1\right\}^2,$$

wobei

$$k = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2a}}$$

ist und die Zeit vom Beginne der Bewegung an gezählt wird.

Sodann ergiebt sich für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2ag}\left\{\sqrt[3]{(1+kt)^2} - 1\right\};$$

ferner für den Druck

$$D = \frac{g}{2}\,\frac{\sqrt{(1+kt)^{\frac{2}{3}} - 1}}{1+kt}\left\{2\,(1+kt)^{\frac{2}{3}} + 1\right\}.$$

Aufgabe 106. Ohne Anfangsgeschwindigkeit rollt (von dem Koordinatenursprunge O aus) ein schwerer Punkt auf der Lemniscate

$$r = a\sqrt{\cos 2\psi} = a\sqrt{\sin 2\theta}$$

herab. Man soll

I. die Zeit t berechnen, nach deren Verlauf die allgemeine Stelle P der Kurve erreicht wird und

II. diese Zeit mit derjenigen (t_1) vergleichen, welche zum Durchrollen des Leitstrahles OP nötig sein würde.

Lösung. Zunächst kommt man auf

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}\,\cos\theta\sqrt{\sin 2\theta}}$$

Da sich dies auf die Form

$$t = \sqrt{\frac{a}{4\sqrt{2g}}}\int (\tan\theta)^{-\frac{3}{4}}(\sec\theta)^2\,d\theta$$

bringen läfst, so entsteht

$$t = \sqrt{\frac{2\sqrt{2a}}{g}}\sqrt[4]{\tan\theta},$$

wenn vom Bewegungsbeginne an gezählt wird.

II. Die Zeit t_1, welche der Punkt brauchen würde, um auf dem Leitstrahle OP herabzurollen, ist (Lösung der Aufg. 5) bestimmt durch

$$s = \tfrac{1}{2}g\cos\theta\,.\,t_1^2.$$

Umgeformt und auf t_1 reduciert, liefert dies den Satz, dafs die beiden Zeiten t und t_1 einander gleich sind.

Aufgabe 107. Das Herabrollen eines schweren Punktes erfolgt auf der starren Kurve

$$z = kx - \frac{g}{2c^2}x^2.$$

Es beginnt zur Zeit Null an der Stelle A, deren Koordinaten sind

$$x_0 = \frac{c^2k}{g}, \quad z_0 = \frac{c^2k^2}{2g}.$$

Dabei ist k eine positive Konstante und c die im Sinne der Abscissen gerichtete Anfangsgeschwindigkeit.

Es soll zunächst die Natur und Lage der vorgeschriebenen Bahn angegeben werden, nachher aber die Art der Bewegung des Punktes, nämlich wie grofs seine Geschwindigkeit v an jeder Stelle z und zu jeder Zeit t ist, wie lange er braucht, um bis zur Höhe z herabzurollen, wie sich die Koordinaten seines Ortes als Funktionen von t ausdrücken lassen und welchen Druck D die Kurve zu jeder beliebigen Zeit erleidet.

Lösung. Dafs die Bahn eine gemeine Parabel ist, deren Achse der z-Achse des Koordinatensystems parallel liegt, erkennt man sofort aus der Art ihrer Gleichung. Bringt man die Letztere auf die Normalform $\xi^2 = 2p\zeta$, so lautet sie

$$\left(x - \frac{c^2k}{g}\right)^2 = \frac{2c^2}{g}\left(\frac{c^2k^2}{2g} - z\right),$$

lehrt also, dafs A der Scheitel ist und $\frac{c^2}{g}$ der Halbparameter.

Für die Geschwindigkeit des Herabrollens findet man

$$v = \sqrt{c^2(1 + k^2) - 2gz} \text{ und } v = \sqrt{c^2 + g^2t^2}.$$

Bis zur Erreichung der Höhe z verstreicht die Zeit

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{c^2k^2 - 2gz}.$$

Die Koordinaten des Ortes sind

$$x = \frac{c^2k}{g} + ct,$$

$$z = \frac{c^2k^2}{2g} - \frac{g}{2}t^2.$$

Der Druck D ergiebt sich zu Null. Dies lehrt, dafs die vorgeschriebene feste Bahn gerade diejenige Parabel ist, in welcher

der schwere Punkt frei gefallen sein würde, wenn er von A aus mit der Anfangsgeschwindigkeit c horizontal fortgeschleudert worden wäre. Hiervon kann man sich auch leicht unmittelbar überzeugen. (Aufg. 66 ist zu vergleichen.)

Aufgabe 108. Ein Punkt, welcher nur seiner Schwere unterliegt, soll auf einer vorgeschriebenen, einfach gekrümmten, festen Bahn derartig herabrollen, dafs er sich mit der Geschwindigkeit c gleichförmig vom Horizonte entfernt. Nach was für einer Linie mufs man jene Bahn krümmen, damit die Bewegung wirklich in der genannten Weise erfolge?

Lösung. Wir nehmen den Anfangspunkt der Bewegung als Koordinatenursprung, legen die x-Achse horizontal, die z-Achse vertikal nach unten. Dann ergiebt sich (aus der Bedingung, dafs die Achsengeschwindigkeit v_z konstant, nämlich gleich c, sein soll)

$$\sqrt{\frac{c^2 + 2gz}{1 + x'^2}} = c$$

als Differentialgleichung der gesuchten Kurve. Hieraus folgt

$$x^2 = \frac{8g}{9c^2} z^3.$$

Die Bahn ist also eine semikubische oder Neil'sche Parabel — die bekannte Evolute der gemeinen. Der Halbparameter der Evolvente hat den (leicht konstruierbaren) Wert

$$p = \frac{c^2}{3g};$$

der Scheitel liegt im Abstande p senkrecht über dem Anfangspunkte der Bewegung; die Achse fällt mit der Richtung der Schwere zusammen.

Aufgabe 109. Wie Nr. 108; doch soll der rollende Punkt sich gleichförmig von der Anfangsstelle seiner Bahn entfernen, d. h. es soll in der Richtung der geradlinigen Verbindung des Ursprunges mit dem betreffenden Kurvenpunkte immer die Geschwindigkeit c herrschen.

Lösung. Da v_r gleich c sein mufs, so lautet die Differentialgleichung der Bahn

$$v \frac{dr}{ds} = c.$$

Dabei ist ein Polarkoordinatensystem zu Grunde gelegt, mit vertikal nach unten gerichteter Achse und dem Bewegungsursprunge als Pol.

Auf dieses bezogen ergiebt sich die Polargleichung der Bahn zu

$$r = \left(\frac{c}{2\sqrt{2g}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} + Const\right)^2$$

oder auch, wenn die Substitution $\cos\theta = u$ benutzt wird, zu

$$r = \left(Const - \frac{c}{2\sqrt{2g}}\int\frac{du}{\sqrt{u-u^3}}\right)^2.$$

In beiden Ausdrücken müssen die Integralwerte, die durch Quadraturen bestimmt werden können, so genommen werden, dafs für $\theta = 0$ auch $r = 0$ wird.

Aufgabe 110. Das Herabrollen eines nur der Schwere unterliegenden Punktes beginnt mit der Anfangsgeschwindigkeit c an einer Bahnstelle A. Es soll derartig erfolgen, dafs sich derselbe dabei um ein festes Centrum O mit einer Winkelgeschwindigkeit bewegt, welche der Entfernung von dem letzteren umgekehrt proportional ist und für deren Einheit den Wert c hat. Das Centrum O befindet sich in der Ebene der Kurve und zwar in dem senkrechten Abstande $OA = 1$ von der letzteren.

Die Polargleichung der Bahn soll bestimmt werden. Die Achse des Koordinatensystems wird durch O, senkrecht zu OA und vertikal nach unten gelegt. O gilt als Pol.

Lösung. Man findet

$$r = \frac{2c^2}{g\left(\int\sqrt{\cos\theta}\,d\theta + Const\right)}$$

oder, wenn $\cos\theta = \omega$ gesetzt wird,

$$r = \frac{2c^2}{g\left(Const - \int\sqrt{\frac{\omega}{1-\omega^2}}\,d\omega\right)},$$

wobei die Konstante so genommen werden mufs, dafs für $\theta = \frac{\pi}{2}$ sich $r = 1$ ergiebt.

Aufgabe 111. Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen z-Achse vertikal nach unten liegt, ist eine gemeine Kettenlinie durch ihre Gleichung

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

gegeben. Auf der Aufsenseite derselben rollt ein Punkt in Folge der alleinigen Wirkung seiner Schwere herab. Er beginnt seine Bewegung an der Stelle A, deren z gleich a $(> k)$ ist.

Man soll denjenigen Ort bestimmen, an welchem der Punkt die Bahn verläfst (von ihr abspringt) und zwar sowohl für den Fall, dafs eine Anfangsgeschwindigkeit c da ist, als auch für den, dafs keine vorliegt. Dabei wird c selbstverständlich derartig vorausgesetzt, dafs es nicht ein sofortiges Wegfliegen veranlafst.

Lösung. Das Abspringen tritt offenbar da ein, wo die Normalkomponente der Schwere, welche nach innen gerichtet ist, der nach aufsen wirkenden Centrifugalkraft gleich wird. Für die Erstere findet man

$$gk\frac{1}{z};$$

für die Letztere hingegen, wenn zunächst Anfangsgeschwindigkeit vorausgesetzt wird,

$$k\frac{c^2 + 2g(z - a)}{z^2}.$$

Dies liefert als Ordinate der Abspringstelle

$$z = \frac{2ag - c^2}{g}$$

oder, wenn man die zu c gehörende Geschwindigkeitshöhe h einführt,

$$z = 2(a - h).$$

Beginnt das Rollen vom Ruhezustande aus, so ist

$$z = 2a.$$

Beide Ausdrücke sind vom Parameter der Kettenlinie unabhängig. Der Erste hängt nur ab von a, c und g, oder von a und h; der Letzte nur von a.

Aufgabe 112. Wie Nr. 111, doch ist die Bahn die allgemeine Kurve $x = f(z)$.

Lösung. Auf dem vorhin angedeuteten Wege findet man, dafs

1) $$g x' (1 + x'^2) + [c^2 + 2g (z - a)] x'' = 0$$

diejenige Gleichung ist, aus welcher sich das z der Abspringstelle ergiebt, wenn für die Differentialquotienten x' und x'' die aus der gegebenen Bahngleichung entnommenen Werte eingesetzt werden.

Benutzt man statt x' $\left(\text{also statt } \frac{dx}{dz}\right)$ lieber z' $\left(\text{nämlich } \frac{dz}{dx}\right)$, so geht 1) über in

$$g (1 + z'^2) - [c^2 + 2g (z - a)] z'' = 0.$$

Aufgabe 113. Mittelst der Gleichung 1) der Lösung der vorigen Aufgabe soll man untersuchen, wo der rollende Punkt, wenn er seine Bewegung im Koordinatenursprunge ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt, von der Bahn

$$z = \sqrt{\left(\frac{x}{k}\right)^3}$$

abspringen wird.

Lösung. Die genannte Gleichung 1) liefert für diesen Fall

$$z = \sqrt{\left(-\frac{4k^2}{3}\right)^3},$$

lehrt also, dafs gar kein Abspringen erfolgt.

Bei einiger Aufmerksamkeit wird man aber die zu diesem imaginären Werte von z führende Rechnung gar nicht erst ausführen, vielmehr zunächst die Form der Bahn beachten und dabei sogleich bemerken, dafs im Koordinatenanfange eine horizontale Tangente vorliegt, der Punkt mithin überhaupt gar nicht in Bewegung gerät.

Aufgabe 114. Aus der Höhe h soll (mit der Anfangsgeschwindigkeit c) ein nur der Schwere unterliegender Punkt auf fester Bahn so herabrollen, dafs die Zeit t, welche er zum Herabkommen auf $h - z$ braucht, immer gleich $x - a$ ist, wobei x und z die rechtwinkligen Koordinaten sind und a eine gegebene Konstante ist.

Es soll, mit Benutzung der Lösung der Aufgabe 102, berechnet werden, welcher Art die Bahn sein mufs, um diese Bewegung herbeizuführen.

Lösung. Die unter 102 dagewesene Gleichung 2) führt zu

dem Resultate, dafs die Kurve auf welcher der Punkt herabrollt, der Bedingung

$$g^2(x - C)^2 + 2gz - (c^2 + 2gh - 1) = 0$$

genügen mufs. Hierbei ist C eine beliebige Konstante. Da sich der Ausdruck auf die Form

$$(x - C)^2 = 2\frac{1}{g}\left(\frac{c^2 + 2gh - 1}{2g} - z\right)$$

bringen läfst, so erkennt man, dafs die gesuchte Bahn eine mit dem Halbparameter $\frac{1}{g}$ konstruirte gemeine Parabel ist, deren Achse der vertikal stehenden z-Achse des Systems parallel liegt, deren Scheitel von der x-Achse um $\frac{c^2 + 2gh - 1}{2g}$ absteht, sonst aber beliebig gewählt werden darf.

Aufgabe 115. Wie Nr. 114; jedoch soll die Zeit t der durchrollten Höhe $h - z$ proportional sein und für die Einheit derselben gleich k.

Lösung. Man findet, dafs

$$(x + C)^2 = \frac{1}{9g^2 k^4}\left\{k^2(c^2 + 2g[h - z]) - 1\right\}^3$$

die Gleichung der Bahn sein mufs. Die Natur derselben kann hiernach leicht ermittelt werden, wobei selbstverständlich auch mit zu beachten ist, welchen Wert h höchstens haben darf, wenn die vorgeschriebene Anfangsstelle der Bewegung überhaupt noch auf der Kurve liegen soll.

Aufgabe 116. An der Aufsenseite einer festen Kurve, welche auf ein Koordinatensystem bezogen ist, dessen z-Achse vertikal nach unten und dessen x-Achse horizontal liegt, rollt ein schwerer Punkt herab. Er beginnt seine Bewegung an derjenigen Stelle der Linie, deren z gleich a ist, mit der Anfangsgeschwindigkeit c. Zu berechnen ist, welcher Art die Bahn sein mufs, wenn sie von dem rollenden Punkte nirgends einen Druck erleiden soll.

Lösung. Dafs der Druck verschwindet, kommt nur dann vor, wenn die Vertikalkomponente der Schwere der Centrifugalkraft gleich ist und im entgegengesetzten Sinne wirkt. Diese Bemerkung liefert die Differentialgleichung

$$gx'(1 + x'^2) + [c^2 + 2g(z - a)]x'' = 0.$$

Aus derselben folgt zunächst

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = \frac{A}{\sqrt{(c^2-2ag)+2gz}}$$

und dann

$$x = \frac{A}{2g}\, 2\sqrt{(c^2-2ag-A^2)+2gz} + B,$$

wobei A und B zwei willkürliche Integrationskonstanten sind.

Die letzte Gleichung lehrt, auf die Form

$$(x-B)^2 = 2\frac{A^2}{g}\left(z - \frac{A^2+2ag-c^2}{2g}\right)$$

gebracht, dafs die gesuchte Bahn eine gemeine Parabel vom Halbparameter $\frac{A^2}{g}$ ist, deren Achse der z-Achse parallel liegt und deren Scheitel die Koordinaten B und $\frac{c^2-2ag-A^2}{2g}$ hat.

Diese Parabel kann auch in eine vertikale Gerade übergehen. Beides kann man voraussagen, ohne die Rechnung durchzuführen.

Die Konstante A wird bestimmbar, wenn man festsetzt, dafs im Anfange (also für $z = a$) der von der Richtung der Geschwindigkeit mit der z-Achse gebildete Winkel gleich α (also $x' = \tan\alpha$) sein soll; man findet dann

$$A = c \sin\alpha.$$

Ebenso folgt

$$B = \frac{bg}{c^2 \sin\alpha \cos\alpha},$$

falls noch vorgeschrieben wird, dafs $x = b$ sein soll, wenn $z = a$ ist.

Aufgabe 117. Auf welcher ebenen Kurve rollt ein nur der Schwere unterliegender Punkt, der seinen Lauf mit der Anfangsgeschwindigkeit c beginnt, so herab, dafs der auf die Bahn ausgeübte Druck überall gleich g ist?

Lösung. Wir nehmen den Ausgangspunkt der Bewegung als Koordinatenanfang, legen die x-Achse horizontal und die z-Achse vertikal nach unten.

Als Differentialgleichung der gesuchten Kurve folgt

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dz}{k+z} = \frac{dx'}{(1+x'^2)(\sqrt{1+x'^2}-x')},$$

wobei

$$k = \frac{c^2}{2g},$$

also die zur Anfangsgeschwindigkeit gehörende Geschwindigkeitshöhe ist. Von hier aus gelangt man zuerst auf

$$A\sqrt{k+z} = (x' + \sqrt{1+x'^2})\sqrt{1+x'^2};$$

nachher zu

$$x = \pm \int \frac{A\sqrt{k+z} - 1}{\sqrt{2A\sqrt{k+z} - 1}}\, dz$$

und findet endlich, dafs

$$x = \pm \frac{2}{5A^2}\sqrt{2A\sqrt{k+z} - 1}\,[A^2(k+z) - A\sqrt{k+z} - 1] + B$$

die Gleichung der verlangten Bahn ist.

Die in derselben vorkommenden Integrationskonstanten A und B können daraus bestimmt werden, dafs die Kurve durch den Koordinatenanfang geht und daselbst die Geschwindigkeit c herrscht.

Aufgabe 118. Ein materieller Punkt ist auf einer allgemeinen festen Plankurve beweglich und unterliegt der alleinigen Wirkung einer Kraft Z. Man kennt die Gleichung der Bahn bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem und weifs, dafs Z eine Funktion von z ist (im Sinne der positiven Ordinaten wirkend). Der Lauf beginnt an derjenigen Bahnstelle A, deren z gleich h ist, mit der Anfangsgeschwindigkeit c und zur Zeit Null. Zu berechnen sind

I. die Geschwindigkeit v, welche der Punkt in der Höhe z besitzt;

II. die Zeit t, welche er braucht, um diese Höhe zu ersteigen;

III. der Druck D, den die Bahn an jeder Stelle erleidet.

Lösung. Der bei Nr. 102 angedeutete Weg leitet hier zu folgenden Resultaten:

I. Die Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{2\int Z dz + Const},$$

wobei die Konstante sich aus der Bedingung ergiebt, dafs v gleich c sein mufs, wenn z den Wert h besitzt.

Wie man sieht, hängt v nicht von der Natur der Bahn ab, sondern nur von z.

II. Für die zum Ersteigen der Höhe z nötige Zeit folgt (als absoluter Wert)

$$t = \int \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{2 \int Z dz + Const}}\, dz + Const.$$

Die neue Konstante ist hierbei daraus bestimmbar, dafs für $z = h$, $t = 0$ sein mufs.

III. Der Druck D setzt sich zusammen aus der Normalkomponente der Kraft Z, nämlich

$$Z \cos \tau = Z \frac{dx}{ds},$$

und aus der Centrifugalkraft

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{2 \int Z dz + Const}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} z''.$$

Aufgabe 119. Die vorgeschriebene Bahn sei eine Kettenlinie von der Gleichung

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right);$$

die Kraft Z sei dem z proportional und habe für die Einheit desselben die Intensität $\frac{c^2}{k^2}$. Die Bewegung möge im Scheitel der Kurve beginnen. Im Übrigen sei Alles, wie bei der vorigen Aufgabe; auch werde die Lösung in demselben Umfange verlangt.

Lösung. Bei Beachtung des Vorhergehenden findet man leicht, dafs die Geschwindigkeit v der erstiegenen Höhe z proportional und für deren Einheit gleich $\frac{c}{k}$ ist.

Für die Steigzeit t folgt

$$t = \frac{k}{c}\, l\, \frac{z + \sqrt{z^2 - k^2}}{k},$$

wofür auch

$$t = \frac{1}{c}\, x$$

geschrieben werden kann.

Der von der Bahn auszuhaltende Druck D ist hier gleich der Normalkomponente von Z vermindert um die Centrifugalkraft. Für Beide ergiebt sich derselbe Wert, nämlich $\frac{c^2}{k}$. Die Linie erleidet mithin nirgends eine Pressung.

Aufgabe 120. Es soll der aufsteigende Punkt sich in gleichen Zeiten um gleich viel vom Horizonte entfernen und zwar mit der Geschwindigkeit c. Die Kraft Z soll der erstiegenen Höhe z immer proportional sein und für $z = 1$ den Wert k^2 haben. Welcher Art ist die Bahn, in der man das Aufsteigen mufs erfolgen lassen?

Lösung. Wir legen den Koordinatenanfang in den Ursprung der Bewegung; die x-Achse horizontal, die z-Achse vertikal nach oben. Da nun v_z gleich c sein soll und für v sich leicht $\sqrt{c^2 + k^2 z^2}$ ergiebt, so folgt als Differentialgleichung der gesuchten Linie

$$\frac{z' \sqrt{c^2 + k^2 z^2}}{\sqrt{1 + z'^2}} = c.$$

Die Integration derselben liefert

$$z^2 = 2 \frac{c}{k} x.$$

Es ist daher die vorzuschreibende Bahn eine gemeine Parabel, deren Scheitel mit dem Anfangspunkte der Bewegung zusammenfällt, deren Achse horizontal liegt und deren Halbparameter die Länge $\frac{c}{k}$ hat.

Aufgabe 121. Wie Nr. 110; doch wirkt nicht die Schwere g, sondern eine Kraft $k^2 z$ (wobei z den Abstand von OA bedeutet).

Lösung. Die Bahn mufs nach der Gleichung

$$r = \frac{c}{c + k(1 - \sin\theta)}$$

gekrümmt sein.

Aufgabe 122. Auf der vorgeschriebenen festen Bahn

$$x = f(z)$$

rollt ein Punkt, beeinflufst von beliebigen Kräften, die sich vereinigen lassen zu den beiden konstanten A und B, welche im Sinne der positiven x, bezüglich in dem der positiven z, thätig sind. Er beginnt seine Bewegung mit der Geschwindigkeit c in einem Kurvenpunkte, dessen z gleich h ist.

Mit welcher Bahngeschwindigkeit v und zu welcher Zeit t durchläuft der sich Bewegende die allgemeine Stelle xz der ihm vorgezeichneten Linie?

Welchen Druck D erleidet die Letztere?

Wie vereinfachen sich die Resultate, wenn B die im Sinne der negativen z wirkende Schwere, A aber gleich Null ist?

Lösung. Auf dem bei Nr. 102 angegebenen Wege findet man

$$v^2 = c^2 + 2A\{f(z) - f(h)\} + 2B(z-h)$$

und

$$t = \int \sqrt{\frac{1+f'(z)^2}{c^2 + 2A\{f(z) - f(h)\} + 2B(z-h)}}\, dz + Const,$$

wobei sich die Konstante aus der Bedingung ergiebt, dafs t gleich Null sein mufs, wenn z gleich h ist.

Die Komponenten, aus denen sich der Druck D zusammensetzt (Normalkraft und Centrifugalkraft), sind

$$N = \frac{A\,dz - B\,dx}{\sqrt{1+f'(z)^2}\,dz}$$

und

$$C = \frac{c^2 + 2A\{f(z) - f(h)\} + 2B(z-h)}{[1+f'(z)^2]^{\frac{3}{2}}} f''(z).$$

Für den in der Aufgabe hervorgehobenen besonderen Fall gehen alle diese Resultate in die unter Nr. 102 angeführten über.

Aufgabe 123. Die Resultirenden der beschleunigenden Kräfte sind nicht konstant (wie sie es bei der vorigen Aufgabe waren), sondern es ist die eine derselben irgend eine Funktion der Abscisse, die andere eine der Ordinate $[X = \varphi(x),\ Z = \psi(z)]$. Im Übrigen liegen die Verhältnisse von Nr. 122 vor. Bahngeschwindigkeit v, Laufzeit t und Druck D werden (als Funktionen von z) gesucht. Ferner soll angegeben werden, wie sich z, v und D durch t ausdrücken lassen; endlich, wie aus den entwickelten Gleichungen die Resultate der Aufgaben 102 und 122 folgen.

Lösung. Von dem für die Tangentialkraft allgemein geltenden Werte

$$T = v\frac{dv}{ds}$$

ausgehend, gelangt man zu der Differentialgleichung

1) $$v\,dv = X\,dx + Z\,dz.$$

Aus ihr folgt

2) $$v = \pm\sqrt{2\int X\,dx + 2\int Z\,dz + C_1},$$

wobei die Konstante C_1 dadurch bestimmt ist, dafs für $z = h$ $v = c$ sein mufs.

Diese Gleichung giebt v durch z ausgedrückt (wie die Aufgabe es verlangt), denn es ist $Z = \psi(z)$ und $X = \varphi(x)$, das x aber hängt durch die Bahngleichung von z ab.

Für die Laufzeit ergiebt sich

$$3) \quad t = \int \frac{\sqrt{1 + f'(z)^2}}{\sqrt{2\int X dx + 2\int Z dz + C_1}} dz + C_2.$$

Hierin ist, wie immer, $f'(z) = \frac{dx}{dz}$, und die Konstante folgt aus der Bemerkung, dafs anfänglich (zur Zeit Null) dem z der Wert h zukommt.

Der Druck D setzt sich zusammen aus der Normalkraft

$$4) \qquad N = \frac{X dz - Z dx}{\sqrt{1 + f'(z)^2}\, dz}$$

und aus der Centrifugalkraft

$$5) \quad C = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{2\int X dx + 2\int Z dz + C_1}{(\sqrt{1 + f'(z)^2})^{\frac{3}{2}}} f''(z),$$

wobei $f''(z) = \frac{df'(z)}{dz}$.

Wird die Gleichung 3) auf z reduciert — vorausgesetzt, dafs dies geschehen kann — und der erhaltene Wert in 2), 4) und 5) eingeführt, so sind dann z, v und D als Funktionen der Zeit bestimmt.

Die Resultate der Lösung der Aufgabe 122 folgen, wie man leicht erkennt, wenn $X = A$ und $Z = B$ gesetzt wird; aus ihnen ferner die von Nr. 102, für $A = 0$ und $B = -g$.

Aufgabe 124. Auf einem über dem Durchmesser $OA = a$ gezeichneten Halbkreise ist ein Punkt beweglich. Er unterliegt nur einer Anziehung, welche ihren Sitz in O hat, der dritten Potenz der Entfernung r umgekehrt proportional wirkt und für die Einheit derselben gleich k^2 ist. In A, dem Anfangspunkte, herrscht die Geschwindigkeit c.

Man soll, unter der Voraussetzung $c > \frac{k}{a}$, diese Bewegung

untersuchen, nämlich die Bahngeschwindigkeit v und die Laufzeit t in passender Weise bestimmen.

Lösung. Mit Benutzung des im Eingange zur vorigen Lösung angeführten Wertes

$$T = v \frac{dv}{ds}$$

der Tangentialkraft, gelangt man zu der Differentialgleichung

$$\frac{v\,dv}{\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta} = \frac{k^2}{r^3} \sin\theta,$$

in welcher θ denjenigen Winkel bezeichnet, den der nach O gerichtete Leitstrahl r mit OA bildet.

Durch Integration folgt hieraus

$$v^2 = c^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \tan^2\theta,$$

womit die Geschwindigkeit als Funktion der Anomalie bestimmt ist.

Zu demselben Resultate kommt man auch, wenn man von der Gleichung 1) der vorigen Lösung ausgeht. Wird OA als x-Achse genommen und durch O senkrecht dagegen die z-Achse gelegt, so ergiebt sich nämlich zunächst

$$v\,dv = -k^2 \frac{x\,dx + z\,dz}{(x^2 + z^2)^2};$$

hieraus sodann, als Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Abscisse,

$$v^2 = c^2 + \frac{k^2}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)$$

und endlich, wenn man für x lieber θ einführt, der vorige Wert.

Versucht man nun mittelst der bekannten Gleichung

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + z'^2}\,dx}{dt}$$

den Zusammenhang zwischen Abscisse und Zeit zu finden, so gelangt man auf

$$t = \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 k^2 + a(a^2 c^2 - 2k^2)x - (a^2 c^2 - k^2)x^2}},$$

was nach bekannter Reduktionsformel leicht weiter behandelt werden kann.

Geht man hingegen aus von

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta}{dt},$$

so kommt man auf die Differentialgleichung

$$a\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 tan^2\theta},$$

durch diese aber zu dem Resultate

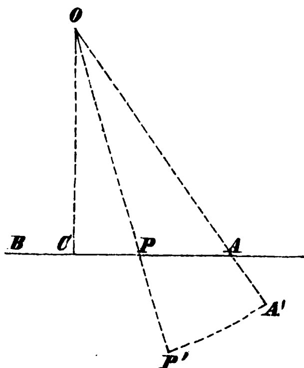
$$t = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 c^2 - k^2}} \cdot arc\,sin \frac{\sqrt{a^2 c^2 - k^2}}{ac} sin\,\theta.$$

Die zum Durchlaufen des ganzen Halbkreises nötige Zeit ist mithin

$$t_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 c^2 - k^2}}\, arc\,sin \frac{\sqrt{a^2 c^2 - k^2}}{ac}.$$

Aufgabe 125. Eine Masse *m*, die sich in dem festen Punkte O befindet (Fig. 11), welcher um b von der Geraden AB absteht, wirkt nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf einen Punkt, der sich nur auf der genannten Geraden bewegen kann. Er beginnt seinen Lauf in A (also unter dem Winkel $COA = \alpha$) ohne Anfangsgeschwindigkeit und befindet sich zur Zeit t in P. Die Anziehung, welche in der Entfernung 1 von der Masse 1 auf die Masse 1 ausgeübt wird, ist gleich k; $CA = a$. Man soll berechnen

Fig. 11.



I. die Geschwindigkeit v des Punktes als Funktion des Winkels $COP = \theta$;

II. den Druck D, welchen die geradlinige Bahn erleidet, ebenfalls als Funktion von θ und auch als solche von $r = OP$.

Ferner, unter der Voraussetzung so kleiner α und θ, dafs die vierten Potenzen derselben vernachlässigt werden können, also $cos\,\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ und $cos\,\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ gesetzt werden darf,

III. diejenige Zeit t (ausgedrückt durch θ), welche der Punkt braucht, um von A an die allgemeine Stelle P zu gelangen; die Zeit t_1 für einen Hingang von A bis C und die Zeit T für eine ganze Schwingung.

IV. Endlich soll man, unter derselben Voraussetzung, die Länge L desjenigen einfachen Pendels bestimmen, dessen Schwingungen — von O aus betrachtet — ebenso aussehen wie die, welche der Punkt längs der Geraden AB ausführt.

Lösung. I. Die unter 123 angeführte Gleichung

$$vdv = Xdx + Zdz$$

führt zu

$$v = \pm K\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha},$$

wobei K die Abkürzung für $\sqrt{\frac{2km}{b}}$ ist. Dieser Wert von v läſst sofort die Art der Bewegung erkennen.

II. Der Druck, den die Bahn erleidet, ist der dritten Potenz des Abstandes von O umgekehrt proportional, nämlich

$$D = \frac{bkm}{r^3};$$

oder, was auf Dasselbe hinauskommt, er steht in direktem Verhältnisse zu der dritten Potenz des Cosinus von θ:

$$D = \frac{km}{b^2}\cos^3\theta.$$

III. Bei der Bestimmung der Zeit t kommt man zunächst auf

$$t = -\frac{b}{K}\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Durch Vernachlässigung der vierten Potenzen von α und θ führt dies zu

$$t = -\frac{b\sqrt{2}}{K}\int\frac{d\theta}{(1-\theta^2)\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}.$$

Setzt man

$$\frac{\theta}{\alpha} = \sin\omega,$$

so entsteht

$$t = -\frac{b\sqrt{2}}{K}\left\{(1+\tfrac{1}{2}\alpha^2)\,\omega - \tfrac{1}{4}\alpha^2\sin 2\omega\right\} + Const.$$

und schliefslich

$$t = \frac{b\sqrt{2}}{K}\left\{(1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2)\, arc\cos\frac{\theta}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}\right\}.$$

Die Dauer eines Hinganges von A bis C ist hiernach

$$t_1 = \frac{\pi b}{2}\sqrt{\frac{b}{km}}(1 + \tfrac{1}{4}\alpha^2)$$

und die einer ganzen Schwingung das Vierfache hiervon.

IV. Ein einfaches Pendel von der Länge $L = OP'$ hat bekanntlich die Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\alpha)}.$$

Hieraus folgt, dafs

$$L = \frac{b^3 g}{km\cos^4\theta}$$

sein mufs, wenn seine Schwingungen — von O aus betrachtet — gerade so aussehen sollen, wie die des längs AB sich bewegenden Punktes. Für kleine Ausschlagswinkel ist diese Pendellänge näherungsweise konstant, nämlich

$$L = \frac{b^3 g}{km}.$$

Aufgabe 126. Auf der festen logarithmischen Spirale

$$r = ae^{-\theta}$$

ist ein Punkt beweglich, welcher nach dem asymptotischen Centrum indirekt proportional dem Quadrate der Entfernung r derartig angezogen wird, dafs diese Anziehung für die Einheit von r gleich k ist — der sonst aber keiner Kraft unterliegt. Er beginnt seine Bewegung in einem Abstande b vom Centrum ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Es soll, unter Benutzung eines Polarkoordinatensystems, dessen Ursprung der asymptotische Punkt der Spirale ist, berechnet werden:

I. die Geschwindigkeit v an der allgemeinen Stelle θr der Bahn;

II. die Zeit t, welche verstreicht, bis diese Stelle erreicht wird;

III. der Druck D, den die Kurve hierselbst erleidet;

IV. die Grenzen, denen sich die Werte von v, t und D nähern.

Lösung. I. Auf dem bei den vorhergehenden Lösungen mehrfach angegebenen Wege findet man

$$v = \sqrt{\frac{2k}{b}\frac{b-r}{r}} = \sqrt{\frac{2k}{ab}(be^{\theta} - a)}.$$

II. Bei der Berechnung von t gelangt man anfänglich zu

$$t = \sqrt{\frac{b}{k}} \int \sqrt{\frac{r}{b-r}}\, dr$$

und kommt dann, mit Benutzung der Substitution

$$r = b \cos^2 \frac{\omega}{2},$$

auf

$$t = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{k}}(\omega + \sin \omega),$$

wobei

$$\omega = 2 \operatorname{arc} \cos \sqrt{\frac{r}{b}}.$$

III. Der von der Bahn erlittene Druck ist

$$D = C - N.$$

Für die Centrifugalkraft ergiebt sich

$$C = \frac{k\sqrt{2}}{b} \cdot \frac{b-r}{r^2};$$

für die Normalkraft hingegen

$$N = \frac{k}{r^2\sqrt{2}}.$$

Man hat daher

$$D = \frac{k}{b\sqrt{2}} \cdot \frac{b-2r}{r^2}.$$

Dieser Druck ist anfänglich, das heifst für $2r > b$, nach innen gerichtet, wird zu Null für $r = \frac{b}{2}$ und geht für noch kleinere r nach aufsen, mit abnehmendem Leitstrahle fortwährend wachsend.

IV. Die Geschwindigkeit nähert sich desto mehr dem Werte unendlich, je näher der sich bewegende Punkt dem asymptotischen Centrum kommt.

Die Laufzeit konvergiert gegen die Grenze

$$T = \frac{b\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{k}}.$$

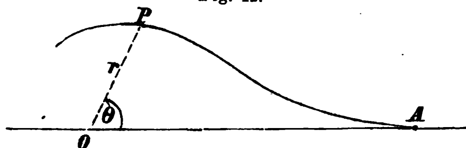
Der Druck D wächst in's Unendliche, wenn r in Null übergeht.

Aufgabe 127. Die Tractorie des Kreises, nämlich die Kurve

$$\theta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - arc\ cos\ \frac{r}{a},$$

bildet die vorgeschriebene feste Bahn eines Punktes. Seine Bewegung beginnt in A (Fig. 12) vom Ruhezustande aus. Sie wird hervorgerufen durch die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgende Anziehung einer im Koordinatenanfange O befindlichen Masse M. Ermittelt soll werden

Fig. 12.



I. Die Kurvennatur, so weit deren Kenntnis für die Untersuchung der Bewegung nötig ist;

II. die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v und der Zeit t vom Leitstrahle r;

III. die des letzteren und der Geschwindigkeit von t;

IV. die zum Durchlaufen der ganzen Bahn nötige Zeit T;

V. der von dem rollenden Punkte ausgeübte Druck D.

Lösung. I. Indem man r als unabhängige Veränderliche benutzt, findet man für das Bogendifferential der Bahn

$$d s = \frac{a}{r} d r.$$

Ferner für den Winkel ψ zwischen Leitstrahl und Normale

$$\psi = arc\ tan \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} = arc\ cos \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = arc\ sin \frac{r}{a}.$$

Endlich für den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = a \frac{r \sqrt{a^2 - r^2}}{a^2 - 2 r^2}.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man leicht Folgendes: 1) Für $\theta = 0$ ist $r = a$. Mit wachsenden Anomalien werden die Radienvektoren immer kleiner, gehen aber erst für $\theta = \infty$ in Null über. Der Koordinatenanfang O ist mithin ein asymptotischer Punkt der

Kurve. 2) Zwischen $r = a$ und $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist die letztere konvex zur Achse OA; bei

$$r = \tfrac{1}{2}\, a \sqrt{2}$$

hat sie einen Wendepunkt und läuft von diesem aus mit stets konkaver Krümmung. Die Anomalie dieses Inflexionspunktes ist

$$\theta = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Er kann leicht durch Konstruktion gefunden werden, weil $\frac{1}{2}\, a \sqrt{2}$ die halbe Hypotenuse eines aus der Kathete a gebildeten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist und weil der Winkel 1, d. i. $57^0\ 17'\ 44{,}8''$, sehr nahe den Tangentenwert $\frac{95}{61}$ besitzt.

II. Für die Geschwindigkeit v, mit welcher der Punkt rollt, ergiebt sich auf dem bei den vorhergehenden Lösungen eingeschlagenen Wege

$$v = ab \sqrt{\frac{a-r}{r}},$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2kM}{a}} = b$$

gesetzt worden ist.

Hiernach wächst v immer, wird aber erst für $r = 0$ (also für $\theta = \infty$) zu ∞.

Die zur Erreichung der Stelle r nötige Zeit ergiebt sich zu

$$t = \frac{1}{b} \arccos \frac{2r - a}{a}.$$

III. Man hat daher umgekehrt

$$r = a \cos^2 (\tfrac{1}{2} bt)$$

und

$$v = ab \tan (\tfrac{1}{2} bt).$$

IV. Zum Durchlaufen der ganzen Bahn bedarf es keiner unendlich langen Zeit, sondern der endlichen

$$T = \frac{\pi}{b}.$$

V. Der von dem rollenden Punkte ausgeübte Druck D setzt sich zusammen aus der Normalkraft

$$N = \tfrac{1}{2}\, a^2 b^2 \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2}$$

und aus der Centrifugalkraft

$$C = ab^2 \frac{a^2 - 2r^2}{r^2} \sqrt{\frac{a-r}{a+r}}.$$

Die Erstere ist stets nach innen gerichtet.

Die Letztere wirkt vor dem Wendepunkte nach innen, hinter demselben nach aufsen.

Beide zusammen liefern

$$D = \tfrac{1}{2}\, a b^2 \, \frac{4r^2 + ar - a^2}{r^2} \sqrt{\frac{a-r}{a+r}}.$$

Der am Inflexionspunkte herrschende Druck hat hiernach den Wert $\tfrac{1}{2}\, a b^2 \sqrt{2}$.

Aufgabe 128. Ein Punkt, welcher die feste Kurve

$$r = f(\theta)$$

nicht verlassen kann, wird dem Newton'schen Gesetze entsprechend nach dem Koordinatenanfange derartig angezogen, dafs diese Attraktion für die Einheit der Entfernung den Wert k besitzt. Er beginnt seine Bewegung vom Ruhezustande aus an derjenigen Stelle der Bahn, welcher der Leitstrahl b zukommt.

Man soll die Geschwindigkeit v bestimmen, die der Punkt an dem allgemeinen Orte θr hat; die Zeit t, welche er braucht, um bis dahin zu laufen und den Druck D, welchen die Kurve an dieser Stelle erleidet.

Lösung. Für die Geschwindigkeit findet man

$$v = \pm \sqrt{\frac{2k}{b} \cdot \frac{b-r}{r}},$$

wonach ihre Natur leicht beurteilt werden kann.

Für die Laufzeit ergiebt sich

$$t = \sqrt{\frac{b}{2k}} \int \sqrt{\frac{r\,(r^2 + r'^2)}{b-r}}\, d\theta + Const.$$

Hierbei ist, wie immer, $r' = \frac{dr}{d\theta}$, so dafs man, wegen $r = f(\theta)$, in jedem speziellen Falle entweder Alles durch r, oder Alles durch θ

ausdrücken und nachher zur Bestimmung des Integralwertes schreiten kann. Die Konstante ergiebt sich dabei aus der Bedingung dafs $t = O$ sein mufs, wenn $r = b$ ist.

Der von der Bahn erlittene Druck D setzt sich zusammen aus der Centrifugalkraft

$$C = \frac{2k}{b} \cdot \frac{(b-r)(r^2 + 2r'^2 - rr'')}{r(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wobei $r'' = \dfrac{dr'}{d\theta}$, und der Normalkraft

$$N = \frac{k}{r\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

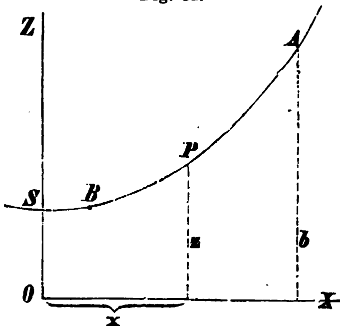
B. Bewegung auf einer ebenen festen Linie mit Widerstand.

Aufgabe 129. Auf der starren Bahn

$$z = f(x)$$

rollt ein Punkt unter dem Einflusse seiner Schwere und eines konstanten Widerstandes W herab, welcher immer in der Richtung der Kurventangente thätig ist. Die Bewegung beginnt mit der Geschwindigkeit c in A (Fig. 13), dessen Ordinate gleich b ist.

Fig. 31.



Man soll berechnen:

I. welche Geschwindigkeit v der Punkt besitzt, nach dem Herabrollen bis zu derjenigen allgemeinen Stelle, der die Ordinate z zukommt;

II. wie grofs diese Geschwindigkeit ist, wenn die gemeine Kettenlinie

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

als Bahn vorliegt; mit welcher Schnelligkeit v_k der Scheitel durchlaufen wird und wo — in der abwärts gehenden Bahn — die gröfste Geschwindigkeit herrscht.

Lösung. I. Die für die Tangentialkraft geltenden Ausdrücke führen zu der Differentialgleichung

$$v\,dv = W\,ds - g\,dz,$$

in welcher s den Bogen SP bedeutet.

Durch Integration folgt hieraus

$$v = \sqrt{2(Ws - gz) + Const.}$$

Dabei ergiebt sich die Konstante aus der Bedingung, dafs für $z = b$ $v = c$ sein mufs.

II. Für die gemeine Kettenlinie erhält man

$$v = \sqrt{c^2 + 2g(b - z) - 2W(\sqrt{b^2 - k^2} - \sqrt{z^2 - k^2})}.$$

Wenn $W = 0$ ist, so nimmt dies die bekannte Form (Lösung der Aufg. 102)

$$v = \sqrt{c^2 + 2g(b - z)}$$

an. Es drückt daher

$$2W(\sqrt{b^2 - k^2} - \sqrt{z^2 - k^2})$$

den Verlust aus, welchen das Quadrat der Geschwindigkeit v durch den Widerstand W erleidet.

Der Scheitel wird mit

$$v_k = \sqrt{c^2 + 2g(b - k) - 2W\sqrt{b^2 - k^2}}$$

durchlaufen.

Die gröfste Geschwindigkeit herrscht an der (leicht konstruierbaren) Stelle

$$z = \frac{gk}{\sqrt{g^2 - W^2}},$$

welche nur für $W = 0$ die tiefste ist.

Aufgabe 130. Wie 129, doch rollt der Punkt aufwärts von einer Stelle B aus, deren z gleich h ist. Man soll berechnen

I. welche Geschwindigkeit v er nach dem Ersteigen des Kurvenpunktes z besitzt;

II. wie grofs dieselbe ist, wenn die Bewegung im Scheitel der gemeinen Kettenlinie beginnt;

III. bis zu welchem Orte z_1 in diesem Falle das Aufsteigen erfolgt.

Lösung. Es ergiebt sich

I. $$v^2 = Const. - 2(gz + Ws).$$

II. $$v^2 = c^2 - 2g(z - k) - 2W\sqrt{z^2 - k^2}.$$

III. Für einen von g verschiedenen Widerstand:

$$z_1 = \frac{1}{2(g^2 - W^2)}\left\{g(c^2 + 2gk) - W\sqrt{c^4 + 4c^2gk + 4k^2W^2}\right\};$$

hingegen für $W = g$:

$$z_1 = \frac{k}{2} + \frac{c^2}{4g} + \frac{gk^2}{c^2 + 2gk}.$$

Aufgabe 131. Die Bewegung des Punktes erfolgt auf der starren Kurve

$$x = f(z).$$

Aufser der Schwere g ist ein Widerstand thätig, welcher in demselben Verhältnisse wächst, wie die Geschwindigkeit v und für $v = 1$ den Wert k besitzt.

I. Die Differentialgleichung der Bewegung soll sowohl für das Herab- als auch für das Hinaufrollen bestimmt werden.

II. Besonderer Fall: Die Bahn ist eine gemeine Cycloide, deren Scheitel mit dem Koordinatenanfange zusammenfällt und deren Basis der x-Achse parallel im Abstande $2a$ liegt. Der Punkt beginnt sein Aufsteigen mit der Geschwindigkeit c im Scheitel der Kurve. Unter der Voraussetzung $k > \sqrt{\frac{g}{a}}$ soll man berechnen

die Beziehung zwischen v und der Bahnlänge s (letztere von der z-Achse aus gezählt),

den ganzen von dem aufsteigenden Punkte durchlaufenen Bogen S.

Lösung. I. Für das Herabrollen lautet die Differentialgleichung der Bewegung

$$vdv = kvds - gdz;$$

für das Hinauflaufen hingegen

$$vdv = -kvds - gdz.$$

II. Die letzte dieser Gleichungen geht für die gemeine Cycloide über in

$$vdv = -kvds - \frac{g}{4a}sds.$$

Hieraus folgt durch Integration und wenn man zur Abkürzung $k\sqrt{\frac{a}{ak^2-g}}$ mit n bezeichnet,

$$\frac{gs^2+4akvs+4av^2}{4ac^2}=\left[\frac{k(n-1)s+2nv}{k(n+1)s+2nv}\right]^n$$

als Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der durchlaufenen Bahn.

Die ganze von dem aufsteigenden Punkte zurückgelegte Kurvenlänge ist mithin

$$S=2c\sqrt{\frac{a}{g}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n}.$$

Aufgabe 132. Auf einer Kurve, für welche der von der z-Achse aus gezählte Bogen immer das k-fache des natürlichen Logarithmus der Ordinate ist $(s=klz)$, bewegt sich ein Punkt abwärts. Er unterliegt seiner Schwere und einem Widerstande gleich $\frac{C}{2}v^2$, also dem Quadrate der Bahngeschwindigkeit proportional. Die Bewegung beginnt an derjenigen Kurvenstelle, deren z den Wert b hat, mit der Geschwindigkeit c. Man soll für den zwischen den positiven Hälften der Koordinatenachsen liegenden Bahnteil berechnen:

I. wie grofs v an der allgemeinen Stelle z ist;
II. wo es seinen gröfsten Wert erreicht;
III. mit welcher Geschwindigkeit u der Punkt in der Ordinatenachse anlangt.

Lösung. I. Als Differentialgleichung der Bewegung ergiebt sich

$$Ckv^2\frac{1}{z}dz-2vdv=2gdz.$$

Multipliciert man dieselbe mit z^{-Ck}, so wird die linke Seite ein vollständiges Differential und man kommt auf

$$v^2=-2gz^{Ck}\int z^{-Ck}dz.$$

Für $Ck \lessgtr 1$ liefert dies

$$v^2=z^{Ck}\left\{\frac{2g}{Ck-1}\left(z^{1-Ck}-b^{1-Ck}\right)+c^2b^{-Ck}\right\};$$

für $Ck=1$ hingegen

$$v^2=z\left(\frac{c^2}{b}-2gl\frac{z}{b}\right).$$

II. Im ersten Falle ist

$$z_1 = \left\{\frac{2gb^{Ck}}{[2gb - c^2(Ck-1)]\,Ck}\right\}^{\frac{1}{Ck-1}}$$

diejenige Stelle, an welcher der Punkt am schnellsten läuft; im zweiten

$$z_1 = b\,e^{\frac{c^2 - 2gb}{2gb}}.$$

III. Die Ordinatenachse wird mit den Geschwindigkeitsquadraten

$$u^2 = \frac{2g}{Ck-1}(1 - b^{1-Ck}) + c^2 b^{-Ck},$$

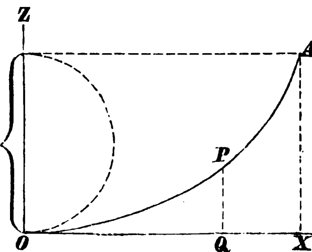
bezüglich

$$u^2 = \frac{c^2}{b} + 2glb,$$

erreicht.

Aufgabe 133. Von der Stelle A der gemeinen Cycloide APO aus rollt ein Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit infolge seiner Schwere herab. Er erleidet einen Widerstand, welcher wie das Quadrat der Geschwindigkeit v wächst und für $v = 1$ den Wert $\frac{C}{2}$ hat.

Fig. 14.



Mit welcher Schnelligkeit läuft der Punkt an der durch die Ordinate $QP = z$, oder durch die Bahnlänge $OP = s$ bestimmten allgemeinen Stelle?

Lösung. Die sich ergebende Differentialgleichung der Bewegung, nämlich

$$C\sqrt{2a}\,\frac{v^2}{\sqrt{z}}\,dz - 2v\,dv = 2g\,dz,$$

läſst sich auf dem bei der vorigen Lösung angegebenen Wege integrieren und liefert

$$v^2 = -\,e^{2C\sqrt{2az}}\left(2g\int e^{-2C\sqrt{2az}}\,dz + B\right)$$

oder, was dasselbe ist,

$$v^2 = -\,e^{Cs}\left(\frac{g}{2a}\int e^{-Cs}s\,ds + B\right).$$

Dies führt zu

$$v = \frac{\sqrt{g}\, e^{C\sqrt{2az}}}{C\sqrt{2a}} \sqrt{(1 + 2C\sqrt{2az})e^{-2C\sqrt{2az}} - (1 + 4aC)e^{-4aC}},$$

worin wieder $2\sqrt{2az}$ durch s ersetzt werden kann.

Aufgabe 134. Die vorgeschriebene Bahn ist die allgemeine Kurve

$$z = f(x).$$

Es wirken die in der vorigen Aufgabe bezeichneten Kräfte, nämlich die Schwere und der Widerstand $\frac{C}{2} v^2$. Die Ordinate von A (Fig. 13) ist b, und es beginnt daselbst die Bewegung mit der Geschwindigkeit c.

I. Mit welcher Schnelligkeit v durchläuft der herabrollende Punkt die allgemeine Bahnstelle xz?

II. Nach welcher Zeit t langt er daselbst an?

III. Was liefert die unter I. für v gefundene Gleichung in dem speciellen Falle, in welchem der vorgeschriebene Weg SPA eine gerade Linie ist, die die x-Achse im Koordinatenanfange O unter dem spitzen Winkel α schneidet, und wenn die Bewegung in A vom Ruhezustande aus beginnt?

Lösung. I. Auf die in den vorhergehenden Lösungen angeführte Weise gelangt man zu

$$v^2 = e^{Cs}\left(B_1 - 2g\int e^{-Cs} dz\right).$$

In jedem besonderen Falle ist s (nämlich SP) durch z, oder z durch s auszudrücken und die Integration auszuführen. Die Konstante B_1 bestimmt sich hierbei aus der Bedingung, dafs für $z = b$ oder $s = SPA$ die Geschwindigkeit $v = c$ sein mufs.

II. Als absoluter Wert der Laufzeit folgt

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{e^{Cs}\left(B_1 - 2g\int e^{-Cs} dz\right)}} + B_2,$$

wobei B_2 aus der Gleichzeitigkeit von $t = 0$, $z = b$ und $s = SPA$ herzuleiten ist.

III. Wendet man die obige für v gefundene Gleichung auf den bezeichneten speciellen Fall an, so ergiebt sich

$$v^2 = \frac{2g \sin\alpha}{C}\left(1 - e^{-C(b-z)\csc\alpha}\right)$$

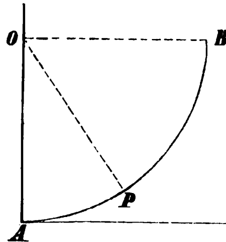
oder, wenn mit s_1 die durchlaufene Strecke bezeichnet wird,

$$v^2 = \frac{2g \sin \alpha}{C}(1 - e^{-Cs_1}).$$

Dies stimmt mit dem unter Nr. 32 Gefundenen überein.

Aufgabe 135. Von der tiefsten Stelle A eines um O (Fig. 15) konstruierten Viertelkreises aus, bewegt sich ein Punkt mit der Anfangsgeschwindigkeit c aufwärts. Er unterliegt seiner Schwere, der Reibung und dem Luftwiderstande. Letzterer ist dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional und hat für $v = 1$ den Wert k. Die Reibung ist das b-fache des Normaldruckes, b also der sogenannte Reibungskoefficient. Der Kreis hat den Halbmesser a. Man soll berechnen

Fig. 15.



I. welche Geschwindigkeit v der Punkt besitzen wird, wenn er den Bogen AP, dessen Centriwinkel θ ist, durchlaufen hat;

II. mit welcher Anfangsgeschwindigkeit c_1 er von A ausgehen müfste, wenn er sich genau bis an diejenige Stelle B erheben sollte, welche am Ende des horizontalen Radius liegt.

Lösung. I. Mit Benutzung der Substitutionen

$$v^2 = u,$$
$$2(ak + b) = \alpha,$$
$$2ag = \beta,$$
$$2abg = \gamma,$$

kommt man auf

$$\frac{du}{d\theta} + \alpha u + \beta \sin \theta + \gamma \cos \theta = 0$$

als Differentialgleichung der Bewegung.

Die auf bekannte Weise ausführbare Integration derselben giebt

$$v^2 = (c^2 + B)e^{-\alpha\theta} - (A \sin \theta + B \cos \theta),$$

wobei

$$A = \frac{\alpha\beta + \gamma}{1 + \alpha^2}$$

und

$$B = \frac{\alpha\gamma - \beta}{1 + \alpha^2}.$$

II. Hieraus folgt, dafs

$$c_1 = \sqrt{Ae^{\frac{\alpha\pi}{2}} - B}$$

diejenige Anfangsgeschwindigkeit ist, welche vorliegen mufs, wenn der ganze Quadrant durchlaufen werden soll.

Wenn Reibung und Luftwiderstand verschwinden, so liefert dies das bekannte $c_1 = \sqrt{2ag}$.

II. Bewegung auf einer vorgeschriebenen festen Fläche.

Aufgabe 136. Ein Punkt, der sich nur auf der starren Fläche

$$z = f(x, y)$$

bewegen kann, wird beeinflufst von beschleunigenden Kräften, welche sich zu einer Resultante zusammensetzen, die parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems in die Komponenten

$$X = \varphi_1(x),$$
$$Y = \varphi_2(y),$$
$$Z = \varphi_3(z)$$

zerlegbar ist.

Man soll angeben

I. wie sich die Geschwindigkeit v als Funktion von x und y bestimmen läfst;

II. wie man die Koordinaten x, y und z durch die Zeit t ausdrücken kann;

III. auf welche Weise sich die Bahngleichungen herleiten lassen;

IV. wie man den Druck D, welchen die Fläche erleidet, zu finden vermag.

Lösung. I. Denkt man sich, um den Punkt als einen freien auffassen zu können, den Widerstand, welchen die Fläche leistet, durch eine Kraft N ersetzt, die in der Richtung der Normale wirkt und bezeichnet man die von der letzteren mit den Koordinatenachsen gebildeten Winkel mit ν_x, ν_y, ν_z, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N \cos \nu_x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N \cos \nu_y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N \cos \nu_z.$$

Sie gehen bei Einführung der Cosinuswerte und Benutzung der Abkürzung

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

über in

$$1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X - NQ \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - NQ \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$3) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + NQ.$$

Mit Beachtung von

$$v^2 = v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

folgt hieraus

$$4) \qquad v^2 = 2\int Xdx + Ydy + Zdz.$$

Da X, Y, Z als Funktionen von bezüglich x, y, z gegeben sind und $z = f(x, y)$ ist, so liefert diese Gleichung die Geschwindigkeit v ausgedrückt durch x und y, wenn man die Integration vornimmt und dabei die Konstante aus irgend einem als gegeben vorliegenden Bewegungszustande (gewöhnlich dem anfänglichen) bestimmt.

II. Um die Koordinaten x, y, z durch t ausdrücken zu können, braucht man drei Gleichungen, in denen nur diese vier Veränderlichen vorkommen. Eine dieser Gleichungen ist die der Fläche, nämlich $z = f(x, y)$; die beiden anderen lassen sich aus 1), 2) und 3) herleiten, indem man N eliminirt.

III. Wenn x, y, z als Funktionen von t bestimmt sind, so ergeben sich, durch Wegschaffung von t, Gleichungen zwischen x und y, x und z, y und z; dies sind die der Projektionen der Bahn.

IV. Endlich kann eine der Gleichungen 1), 2), 3), oder eine Verbindung derselben, dazu dienen, die Normalkraft N zu finden. Hiermit hat man dann auch den senkrechten Druck D, welchen die Fläche erleidet, denn er ist N gleich, nur entgegengesetzt gerichtet.

Ob und in welcher Weise die hier angedeuteten Operationen ausführbar sind, ist Sache des speciellen Falles.

Aufgabe 137. Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen xy-Ebene horizontal und dessen z-Achse im Sinne der Schwere gerichtet liegt, ist eine Ebene gegeben, welche die y-Achse in sich enthält. Auf derselben befindet sich ein Punkt, der nur seiner Schwere unterliegt. Er beginnt seine Bewegung im Koordinatenanfange mit einer Geschwindigkeit c, deren Richtung mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet. Die Neigung der vorgeschriebenen Ebene unter den Horizont beträgt λ Grad (wobei bekanntlich λ mit den vorhergenannten Winkeln zusammenhängt). Man soll berechnen

I. die Geschwindigkeit v, welche der Punkt an der allgemeinen Stelle seiner Bahn besitzt;

II. v und die Koordinaten x, y, z seines Ortes als Funktionen der Zeit t;

III. die Gleichungen der auf die drei Koordinatenebenen bezogenen Projektionen der Bahn;

IV. den Druck D, welchen die Ebene erleidet.

Lösung. I. Nach Anleitung der vorhergehenden Lösung findet man als Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N \sin \lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g + N \cos \lambda.$$

Aus denselben, oder aus Nr. 4 der Lösung der Aufgabe 136, folgt

$$v = \sqrt{c^2 + 2gz},$$

was einen sehr bekannten Satz ausspricht.

II. Zur Zeit t befindet sich der Punkt an dem durch die Koordinaten

$$x = \tfrac{1}{4} g t^2 \sin 2\lambda + ct \cos \alpha,$$
$$y = ct \cos \beta,$$
$$z = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin^2 \lambda + ct \cos \gamma$$

bestimmten Orte und besitzt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{c^2 + 2g\left(\tfrac{1}{2} g t^2 \sin^2 \lambda + ct \cos \gamma\right)}.$$

III. Als Gleichung der xy-Projektion der Bahn ergiebt sich zunächst

$$2c^2 x \cos^2 \beta = g y^2 \sin \lambda \cos \lambda + 2c^2 y \cos \alpha \cos \beta,$$

was leicht auf die Form

$$\left(y + \frac{c^2 \cos \alpha \cos \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda}\right)^2 = 2\,\frac{c^2 \cos^2 \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda}\left(x + \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{2g \sin \lambda \cos \lambda}\right)$$

gebracht werden kann. Man sieht hieraus, dafs diese Projektion eine gemeine Parabel ist, deren Achse parallel zur x-Achse liegt, deren Halbparameter den Wert

$$p = \frac{c^2 \cos^2 \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda}$$

besitzt und deren Scheitel um

$$A = \frac{c^2 \cos \alpha \cos \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda}$$

von der Achse der x, hingegen um

$$B = \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{2g \sin \lambda \cos \lambda}$$

von der der y absteht.

Ganz ebenso ergiebt sich für die yz-Projektion

$$\left(y + \frac{c^2 \cos \alpha \cos \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda}\right)^2 = 2\,\frac{c^2 \cos^2 \beta}{g \sin^2 \lambda}\left(z + \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{2g \cos^2 \lambda}\right),$$

woraus, bezüglich der Form derselben, das dem Vorhergehenden Entsprechende folgt.

Die xz-Projektion der Bahn fällt mit der gleichnamigen Spur der vorgeschriebenen Ebene zusammen; ihre Gleichung ist daher

$$z = x \tan \lambda.$$

IV. Der von dem Punkte ausgeübte Druck hat den Wert

$$D = g \cos \lambda.$$

Aufgabe 138. Auf einem Rotationsparaboloide von der Gleichung

$$z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$$

soll sich ein Punkt derartig bewegen, dafs er auf die Fläche überall den konstanten Druck k ausübt und — der Zeit t proportional — immer gleich weit von der yz- wie von der xz-Ebene entfernt ist.

Man soll, nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 135, bestimmen, welcher Art die Kräfte X, Y, Z sein müssen, die ihn in den Richtungen der positiven Koordinaten antreiben; ferner, mit welcher Geschwindigkeit v er läuft, wenn die Bewegung mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c im Koordinatenanfange beginnt; endlich, wie seine Bahn beschaffen ist.

Lösung. Die Natur der die Bewegung erzeugenden Kräfte wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$X = \frac{kx}{\sqrt{a^2 + 2x^2}} = \frac{kbt}{\sqrt{a^2 + 2b^2t^2}},$$

$$Y = X,$$

$$Z = \frac{2b^2}{a} - k\sqrt{\frac{a}{a + 2z}} = \frac{2b^2}{a} - \frac{ak}{\sqrt{a^2 + 2b^2t^2}},$$

die sich leicht auf noch andere Formen bringen lassen und in denen b diejenige Strecke bezeichnet, um welche sich der Punkt zur Zeit 1 von der yz-Ebene entfernt hat.

Die Geschwindigkeit des Letzteren ergiebt sich zu

$$v = \frac{1}{a}\sqrt{4b^2x^2 + a^2c^2} = \frac{1}{a}\sqrt{4b^4t^2 + a^2c^2}.$$

Die Bahn ist der von den beiden vertikalen Koordinatenebenen gleich weit abstehende Meridian des Umdrehungsparaboloids.

Denen, welche bezüglich der Untersuchung der Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener fester Fläche weitere Anregung zu haben wünschen, sei empfohlen, solche Fälle zu behandeln, in denen eine Rotationsfläche vorliegt und die in der Gleichung 4) der Lösung der Aufgabe 136 auftretende von den wirkenden Kräften abhängende Summe

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

ein vollständiges Differential einer Funktion der Koordinaten x, y und z ist, oder nur von der Rotationsachsenentfernung bestimmt wird.

III. Bewegung auf einer vorgeschriebenen festen Linie im Raume.

Aufgabe 139. Auf einer starren Kurve, welche die Durchschnittslinie der Flächen

$$1)\qquad F_1(x, y, z) = 0$$

und

$$2)\qquad F_2(x, y, z) = 0$$

ist, bewegt sich ein Punkt in Folge von beliebig vielen Kräften, die parallel zu den Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems die Komponenten X, Y, Z liefern, welche Funktionen von x, y, z sind.

Die Bewegung beginnt zur Zeit Null mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einem Punkte, dessen Koordinaten die Werte a, b und c haben.

Es soll angegeben werden, auf welche Weise man die x, y, z des Punktes, ferner seine Geschwindigkeit v, endlich den auf die Bahn ausgeübten Druck und dessen Richtungswinkel gegen die drei Koordinatenachsen als Funktionen der Zeit t berechnen kann.

Lösung. Um den beweglichen Punkt als einen freien ansehen zu können, denkt man sich den Widerstand, welchen die starre Bahn leistet, durch eine Normalkraft N ersetzt, die mit den drei Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν einschliefst. Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung

$$3)\qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \lambda,$$

$$4)\qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \mu,$$

$$5)\qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \nu.$$

Werden ferner die Winkel, welche die Tangente im Punkte xyz mit den drei Achsen bildet, durch ζ, η, θ bezeichnet, so hat man noch

$$\cos \lambda \cos \zeta + \cos \mu \cos \eta + \cos \nu \cos \theta = 0$$

oder

$$6) \qquad \cos\lambda\,\frac{dx}{ds} + \cos\mu\,\frac{dy}{ds} + \cos\nu\,\frac{dz}{ds} = 0,$$

wobei ds das Bogenelement bedeutet.

Endlich ist

$$7) \qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Zwischen den acht Gröfsen x, y, z, λ, μ, ν, N und t bestehen also sieben Gleichungen. Mittelst derselben können die Koordinaten x, y, z, die Geschwindigkeit v, der Druck auf die Bahn und seine Richtungswinkel als Funktionen der Zeit t bestimmt werden.

Zunächst ergiebt sich aus 3), 4) und 5)

$$8) \quad \frac{d^2 x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2 y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2 z}{dt^2}\,dz = Xdx + Ydy + Zdz,$$

hieraus aber, bei Beachtung von

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2,$$

die Gleichung

$$9) \qquad vdv = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Da nun X, Y, Z von x, y, z abhängen, x und y aber sich mittelst 1) und 2) als Funktionen von z darstellen lassen (wenn, wie vorausgesetzt werden möge, die betreffenden Umformungen der vorliegenden Gleichungen möglich sind), so erhält man hieraus

$$vdv = F_3(z)\,dz$$

und endlich

$$10) \qquad v = F_4(z) + Const.,$$

wobei die Konstante sich aus der Bedingung ergiebt, dafs v gleich v_0 sein mufs, wenn z den Wert c hat.

Da nun ferner

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

ist, x und y aber ausdrückbar sind durch z, so giebt dies, verbunden mit 10), eine Gleichung von der Form

$$11) \qquad z = F_5(t).$$

Hat man aber z als Funktion der Zeit, so hat man [nach 1) und 2)] auch x und y als solche; desgleichen [nach 10)] die Geschwindigkeit v.

Was endlich den von der Bahn auszuhaltenden Druck anlangt,

so ist derselbe gleich dem Widerstande N. Für Letzteren aber folgt aus 3) bis 5), unter Beachtung von 7),

$$12)\qquad N = \pm\sqrt{(x''-X)^2+(y''-Y)^2+(z''-Z)^2},$$

wobei $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$, $z'' = \frac{d^2z}{dt^2}$.

Auch liefern 3), 4) und 5) die Richtungswinkel des Druckes, nämlich

$$13)\qquad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{x''-X}{N}, \\ \cos\mu = \dfrac{y''-Y}{N}, \\ \cos\nu = \dfrac{z''-Z}{N}. \end{cases}$$

Da man nun, nach dem Vorhergehenden, x, y, z, X, Y, Z durch t ausdrücken kann, so sind hiermit auch N, λ, μ und ν als Funktionen der Zeit bestimmt.

Die weitere Ausführung des hier Angegebenen ist selbstverständlich Sache des besonderen Falles.

Aufgabe 140. Eine Gerade, welche durch den Koordinatenanfang eines rechtwinkligen Systems geht, liegt derartig, dafs ihre Horizontalprojektion mit der x-Achse den Winkel α, ihre Vertikalprojektion mit derselben Achse den Winkel β bildet. Auf dieser Geraden ist ein Punkt beweglich, welcher in den Richtungen der positiven x-, y- und z-Achse von den konstanten Kräften A, B, C beeinflufst wird. Er beginnt seine Bewegung im Koordinatenanfange vom Ruhezustande aus. Man soll (nach Anleitung der Lösung der vorhergehenden Aufgabe) berechnen:

I. welche Geschwindigkeit v der Punkt besitzt, nachdem er die Höhe z erstiegen oder nachdem er die Entfernung x von der yz-Ebene erlangt hat;

II. welches die Koordinaten seines Ortes zur Zeit t sind;

III. mit welcher Geschwindigkeit er in diesem Augenblicke läuft;

IV. welchen Druck D die geradlinige Bahn zur Zeit t erleidet;

V. wie sich die unter I) bis IV) gefundenen Resultate vereinfachen, wenn die Bahn mit der x-Achse zusammenfällt.

Lösung. I. Für die gesuchte Geschwindigkeit findet man

$$v = \sqrt{2Lz\cot\beta} = \sqrt{2Lx},$$

wobei zur Abkürzung

$$A + B \tan \alpha + C \tan \beta = L$$

gesetzt wurde.

Dieselbe ist also proportional der Quadratwurzel der erstiegenen Höhe und auch der der Entfernung von der yz-Ebene.

II. Die Koordinaten des Ortes sind, wenn man

$$1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta = M$$

setzt und t vom Beginne der Bewegung an rechnet,

$$x = \frac{1}{2} \frac{L}{M} t^2,$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{L}{M} t^2 \tan \alpha,$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{L}{M} t^2 \tan \beta,$$

wachsen mithin wie die Quadrate der Zeiten.

III. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt läuft, nimmt hingegen zu wie die erste Potenz; es ist nämlich

$$v = \frac{L}{\sqrt{M}} t.$$

IV. Der von der Bahn auszuhaltende Druck besitzt den Wert

$$D = \sqrt{\frac{(A \tan \alpha - B)^2 + (A \tan \beta - C)^2 + (C \tan \alpha - B \tan \beta)^2}{M}},$$

hat also beständige Größe — was übrigens auch ohne Rechnung sich sofort erkennen läfst.

Seine Richtungswinkel λ, μ und ν sind bestimmt durch

$$\cos \lambda = \frac{L - AM}{MN},$$

$$\cos \mu = \frac{L \tan \alpha - BM}{MN},$$

$$\cos \nu = \frac{L \tan \beta - CM}{MN},$$

in welchen Gleichungen N den von der Bahn geleisteten Widerstand bedeutet, der D gleich ist, aber entgegengesetzt gerichtet.

V. Für den in der Aufgabe genannten besonderen Fall liefern die unter I) bis IV) stehenden Formeln

$$v = \sqrt{2Ax},$$
$$x = \tfrac{1}{2} At^2$$

nebst den selbstverständlichen Werten $y = 0$, $z = 0$.

Ferner

$$v = At$$

und endlich

$$D = \sqrt{B^2 + C^2}.$$

Diese Resultate sind, als giltig für die Bewegung in einer Geraden unter alleinigem Einflusse einer konstanten Kraft A, allgemein bekannt.

Aufgabe 141. Unter der alleinigen Wirkung der Schwere rollt auf einer Schraubenlinie, deren Achse senkrecht steht, ein Punkt herab. Die Bewegung beginnt ohne Anfangsgeschwindigkeit. Der Steigungswinkel der Schraubenlinie ist α, der Halbmesser derselben gleich a. Sie wird auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen z-Achse vertikal nach unten gerichtet ist und von dessen x-Achse aus die Bewegung erfolgt.

Man soll für den rollenden Punkt die Geschwindigkeit v, die Ortskoordinaten x, y, z, den auf die Bahn ausgeübten Druck D und dessen Richtungswinkel λ, μ, ν nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 139 als Funktionen der Zeit t bestimmen.

Lösung. Ohne Schwierigkeit gelangt man (die Zeit vom Bewegungsbeginne an rechnend) zu den sehr einfache Gesetze aussprechenden Gleichungen

$$v = gt \sin \alpha,$$
$$z = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin^2 \alpha.$$

Ferner zu den zusammengesetzteren Werten

$$y = a \sin \frac{gt^2 \sin 2\alpha}{4a},$$

$$x = a \cos \frac{gt^2 \sin 2\alpha}{4a}.$$

Endlich ergiebt sich der absolute Wert des von der Schraubenlinie auszuhaltenden Druckes zu

$$D = \frac{g \cos \alpha}{a} \sqrt{a^2 + (g^2 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha)\, t^4};$$

für seine Richtungswinkel aber

$$\cos\lambda = \frac{x''}{N}, \quad \cos\mu = \frac{y''}{N}, \quad \cos\nu = \frac{z'' - g}{N},$$

in welchen Ausdrücken N dem D gleich ist, doch entgegengesetzt gerichtet, x'', y'' und z'' aber der Reihe nach die Werte

$$-2ak\,(2kt^2 \cos kt^2 + \sin kt^2),$$
$$-2ak\,(2kt^2 \sin kt^2 - \cos kt^2),$$
$$g \sin^2\alpha$$

haben, wobei k die Abkürzung für $\frac{g \sin 2\alpha}{4a}$ bedeutet.

Anmerkung. Zu denselben Resultaten kann man auch leicht kommen, ohne von der Gleichung 9) der zu Nr. 139 gehörenden Lösung auszugehen. Man braucht nur zu beachten, dafs einerseits für die Tangentialkraft allgemein der Ausdruck $\frac{d^2 s}{dt^2}$ gilt, andererseits aber für unseren Fall dieselbe gleich $g \sin\alpha$ ist. Dies liefert zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin\alpha,$$

führt damit auf

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g \sin^2\alpha,$$

von hier aus zu

$$z = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin^2\alpha,$$

mithin auch zu allen übrigen vorstehenden Werten.

Aufgabe 142. Drei im Sinne der positiven Koordinaten eines rechtwinkligen Systems thätige Kräfte X, Y, Z, welche nach den Gesetzen

$$X = \frac{kx}{\sqrt{a^2 + 2x^2}},$$

$$Y = \frac{ky}{\sqrt{a^2 + 2y^2}},$$

$$Z = \frac{2b^2}{a} - \frac{ka}{\sqrt{a^2 + 2az}},$$

$$a,\ b,\ k \text{ konstant}, \quad \frac{2b^2}{a} > k,$$

wirken, beeinflussen einen materiellen Punkt. Derselbe kann sich nur auf einer gemeinen oberhalb der xy-Ebene liegenden Parabel bewegen, deren Halbparameter a, deren Scheitel der Koordinatenanfang ist, deren Achse mit der z-Achse zusammenfällt und deren Ebene mit der xz-Ebene einen Winkel von 45 Grad bildet.

Die Bewegung des Punktes beginnt im Parabelscheitel mit der Geschwindigkeit $b\sqrt{2}$.

Von der Gleichung 9) der zu Nr. 139 gehörenden Lösung ausgehend soll man zunächst die Bahngeschwindigkeit v bestimmen und zwar sowohl als Funktion der erstiegenen Höhe z, wie auch als solche der verflossenen Zeit t.

Ferner für den Augenblick t die Koordinaten x, y, z des Ortes des Punktes, die Gröfse des Druckes, welchen die Bahn erleidet und seine Richtungswinkel λ, μ, ν.

Lösung. Die Geschwindigkeit nimmt nach den Gesetzen

$$v = \frac{b}{a}\sqrt{2a(a+2z)}$$

und

$$v = \frac{b}{a}\sqrt{2(a^2+2b^2t^2)}$$

(die Zeit vom Bewegungsbeginne an gerechnet) zu.

Die Koordinaten der Horizontalprojektion des sich bewegenden Punktes sind

$$x = bt \text{ und } y = bt;$$

er entfernt sich also der Zeit proportional von den beiden Vertikalebenen und hat für $t = 1$ von ihnen den Abstand b.

Die erstiegenen Höhen z wachsen wie die Quadrate der verflossenen Zeiten und für die Einheit von t ist z gleich $\frac{b^2}{a}$.

Der auf die Bahn ausgeübte Druck ist überall gleich stark, nämlich gleich k.

Die Richtungswinkel desselben besitzen die Cosinuswerte

$$\cos\lambda = -\frac{bt}{\sqrt{a^2+2b^2t^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2+2x^2}},$$

$$\cos\mu = \cos\lambda,$$

$$\cos\nu = \frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2t^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+2az}}.$$

Aufgabe 143. Die Vertikalprojektion einer vorgeschriebenen festen Bahn hat die Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2} z^2,$$

ist also eine gemeine Parabel mit dem Halbparameter 1, die seitliche Vertikalprojektion besitzt die Gleichung

$$y = \tfrac{2}{3} \sqrt{2 z^3},$$

bildet mithin eine Neil'sche oder semicubische Parabel.

Ein materieller Punkt ist gezwungen, sich auf jener festen Bahn zu bewegen und unterliegt Einflüssen, welche sich in den Richtungen der positiven Systemachsen zu den Kräften

$$X = 2k^2 z^2,$$
$$Y = 3\sqrt{2} k^2 z^{\frac{3}{2}},$$
$$Z = 2k^2 (3z + 1)$$

vereinigen lassen. Er beginnt seine Bewegung im Koordinatenanfange und hat daselbst in der Richtung seiner Bahn die Geschwindigkeit k.

Verlangt wird das in der vorhergehenden Aufgabe Genannte.

Lösung. Ohne Schwierigkeiten findet man

$$v = k(1 + z)^2$$

und

$$v = k e^{2kt},$$

wobei die Zeit vom Beginne der Bewegung an gezählt ist. Die Geschwindigkeiten wachsen also in geometrischer Progression.

Die Ortskoordinaten ergeben sich zu

$$x = \tfrac{1}{2} (e^{kt} - 1)^2,$$
$$y = \tfrac{2}{3} \sqrt{2} (e^{kt} - 1)^{\frac{3}{2}},$$
$$z = e^{kt} - 1.$$

Bei der Berechnung des Druckes [nach Gl. 12) von Nr. 139] kommt man zunächst auf

$$x'' - X = k^2 (3 e^{kt} - 2),$$

$$y'' - Y = -\frac{k^2 \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3e^{2kt} - 10 e^{kt} + 6}{\sqrt{e^{kt} - 1}}$$

$$z'' - Z = k^2 (4 - 5 e^{kt})$$

und erhält damit

$$N^2 = \frac{k^4}{2} \cdot \frac{9e^{4kt} + 8e^{3kt} - 36e^{2kt} + 24e^{kt} - 4}{e^{kt} - 1}.$$

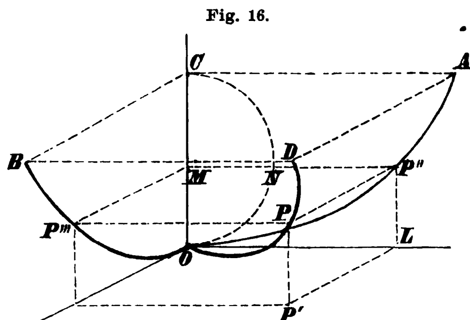
Durch die letzten vier Gleichungen sind [nach 13) von Nr. 139] auch die Richtungswinkel des Druckes bestimmt.

Wenn kt hinreichend grofs ist, so kann man, ohne wesentlichen Fehler, im Zähler des vorstehenden Wertes von N^2 statt -4 auch -5 schreiben. Dann wird einfacher

$$N^2 = \tfrac{1}{2}k^4(9e^{3kt} + 17e^{2kt} - 19e^{kt} + 5).$$

Aufgabe 144. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist eine Cycloide $OP''A$ (Fig. 16) gezeichnet, für welche $OC = b$ der Durchmesser des erzeugenden Kreises, CA die halbe Basis und O der Scheitel ist; in der yz-Ebene eine gemeine Parabel, deren Halbparameter gleich $2a$, deren Achse die z-Achse und deren Scheitel ebenfalls der Koordinatenanfang. Über der Cycloide steht eine Cylinderfläche parallel zur y-Achse; über der Parabel eine andere parallel zur x-Achse.

Fig. 16.



Auf der Durchschnittslinie dieser beiden Flächen ist ein materieller Punkt beweglich, welcher, aufser von seiner eigenen Schwere, nur von einer Kraft U beeinflufst wird, die im Sinne der positiven z thätig ist.

Die Bewegung beginnt im Koordinatenanfange mit der Geschwindigkeit c. Sie soll derartig erfolgen, dafs die Bahngeschwindigkeit v immer aus dem konstanten Teile c und aus einem veränderlichen besteht, welcher letztere der erstiegenen Höhe z proportional ist und für z gleich 1 den Wert k hat.

Man soll berechnen

I. welcher Art die Kraft U sein mufs, die diese Bewegung erzeugt;

II. welche Höhe z der Punkt zur Zeit t erstiegen hat;

III. wie grofs die Geschwindigkeit v um diese Zeit ist.

Lösung. I. Die Kraft U mufs aus einem konstanten Teile $kc + g$ und aus einem veränderlichen bestehen, welcher letztere wie z wächst und für dessen Einheit gleich k^2 ist. $(U = kc + g + k^2 z)$.

Oder man kann auch sagen: sie besteht aus dem konstanten Teile g und aus dem variabelen kv, welcher der Geschwindigkeit v proportional ist und für v gleich 1 den Wert k hat. $(U = g + kv)$.

II. Bei der Bestimmung von z als Funktion der (vom Bewegungsbeginne an gerechneten) Zeit t thut man wohl zu beachten, dafs $\frac{dz}{dx}$ sich sofort angeben läfst, wenn man sich erinnert, dafs die Tangente im Punkte P'' der Geraden ON parallel sein mufs. Man kommt zunächst auf

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}}\, t = \int \frac{dz}{(c+kz)\sqrt{z}}$$

und damit zu

$$z = \frac{c}{k} \tan^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{kc}{a+b}}\, t\right).$$

III. Die zur Zeit t herrschende Geschwindigkeit ist

$$v = c \sec^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{kc}{a+b}}\, t\right).$$

Capitel IV.

Aufgaben über die Berechnung von Trägheitsmomenten.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Befindet sich ein materieller Punkt, welcher die Masse M besitzt, im Abstande r von einer festen Drehachse und wird mit k die Winkelbeschleunigung bezeichnet, so hat man in

$$P = Mkr$$

diejenige Kraft, welche nötig ist, um dem Punkte seine Beschleunigung kr zu erteilen.

Wirkt diese Kraft am Hebelarme a, so stellt

$$Pa = Mkr^2$$

ihr Moment für die Drehung dar.

Liegt statt eines einzelnen Punktes ein ganzes System von materiellen Punkten vor, welche die Massen M_1, M_2, M_3, ... haben und sich in den Abständen r_1, r_2, r_3, ... von der Drehachse befinden, so mufs

$$Pa = M_1\,kr_1^2 + M_2\,kr_2^2 + M_3\,kr_3^2 + \dots$$

sein, oder kürzer ausgedrückt,

$$Pa = \Sigma\,(Mkr^2) = k\,\Sigma\,(Mr^2).$$

Für eine stetig verteilte Masse wird hieraus

$$1)\qquad Pa = k \int r^2\,dM.$$

Dabei ist dM das Massenelement, also

$$dM = \varepsilon\,d\,V,$$

wenn mit ε die (konstante oder variabele) Dichtigkeit und mit $d\,V$ das Volumenelement bezeichnet wird.

Das Integral ist ein einfaches oder mehrfaches, je nach der Form der vorliegenden stetig zusammenhängenden Masse.

Dieser Form am besten entsprechend wird man auch entweder rechtwinklige, oder polare, oder noch andere Koordinaten wählen und dV in Bezug auf dieselben ausdrücken.

Nach Gleichung 1) ist das Integral

2) $$T = \int r^2\, dM$$

das Maafs für die Beharrung. Es heifst bekanntlich Trägheits-, Drehungs- oder Massenmoment.

Fällt die Drehachse, in Bezug auf welche dieses Moment genommen wird, mit der z-Achse eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems zusammen, so geht die Gleichung 2) über in

3) $$T_z = \int (x^2 + y^2)\, dM.$$

Ebenso lautet das auf die y-Achse bezogene Trägheitsmoment

4) $$T_y = \int (x^2 + z^2)\, dM$$

und endlich das für die x-Achse giltige

5) $$T_x = \int (y^2 + z^2)\, dM.$$

Unter dem Trägheitshalbmesser, (welcher mit ϱ bezeichnet werden möge) versteht man diejenige Entfernung von der Drehachse, in welcher die gesamte Masse M eines Massensystems, in einem Punkte koncentriert, dasselbe Trägheitsmoment haben würde, welches die in dem Systeme verteilte Masse besitzt. Es ist also ϱ durch die Gleichung

6) $$M\varrho^2 = T = \int r^2\, dM$$

bestimmt.

Hiernach ist T die auf die Entfernung 1 von der Drehachse reducierte Masse des Systems.

I. Trägheitsmomente gleichförmig dichter Linien, Flächen und Körper.

A. Trägheitsmomente von Linien.

a) Ebene Linien.

Aufgabe 145. Eine ebene Kurve AB, die den konstanten Querschnitt q und die Dichtigkeit ε besitzt*, hat in Bezug auf ein recht-

* Diese beiden Voraussetzungen mögen für alle unter A stehenden Aufgaben gelten.

winkliges Koordinatensystem die Gleichung

$$y = f(x).$$

Der Anfangspunkt A steht um x_0, der Endpunkt B um x_1 von der Ordinatenachse ab.

I. Man soll die auf die x- und y-Achse bezogenen Trägheitsmomente T_x und T_y dieser Linie berechnen und

II. angeben, wie dieselben lauten, wenn die Kurve bezogen auf Polarkoordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$r = \varphi(\theta)$$

gegeben ist und von θ_0 bis θ_1 gerechnet wird.

Lösung.

I. $$T_x = q\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$T_y = q\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} x^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

II. $$T_x = q\varepsilon \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 \sqrt{r^2 + r'^2}\, \sin^2\theta\, d\theta,$$

$$T_y = q\varepsilon \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 \sqrt{r^2 + r'^2}\, \cos^2\theta\, d\theta.$$

Aufgabe 148. Eine Stange (materielle Gerade) AB hat die Länge L und ist unter dem Winkel α gegen eine Drehachse UV geneigt, welche mit ihr in derselben Ebene liegt. Der Anfangspunkt A steht um c von dieser Achse ab.

I. Welches Trägheitsmoment T besitzt die Stange in Bezug auf UV?

II. Wie vereinfacht sich dasselbe, wenn UV durch A gelegt wird und wie lautet es, wenn UV durch den Schwerpunkt von AB geht?

III. Welches sind in diesen beiden besonderen Fällen die Trägheitshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2?

Lösung. I. Nimmt man UV als x-Achse und denjenigen Punkt, in welchem AB, oder dessen Verlängerung, einschneidet, als Koordinatenanfang eines rechtwinkligen Systems, so erhält man leicht

$$T = q\varepsilon \tan^2\alpha \sec\alpha \int_{c\cot\alpha}^{c\cot\alpha + L\cos\alpha} x^2\,dx,$$

wobei c als negative Strecke aufzufassen ist, wenn AB die Achse UV schneidet.

Von hier aus gelangt man zu folgenden Resultaten:

$$T = \tfrac{1}{3} M (3c^2 + 3cL\sin\alpha + L^2\sin^2\alpha),$$

$M = q\varepsilon L =$ Masse der Geraden;

II. $$T_1 = \tfrac{1}{3} ML^2 \sin^2\alpha;$$

$$T_2 = \tfrac{1}{12} ML^2 \sin^2\alpha;$$

III. $$\varrho_1 = \tfrac{1}{3} L\sqrt{3}\sin\alpha;$$

$$\varrho_2 = \tfrac{1}{6} L\sqrt{3}\sin\alpha,$$

also $\varrho_1 = 2\varrho_2$. (Man vergleiche auch „Trägheitsmomente für parallele Achsen", Aufg. 188.)

Aufgabe 147. Für den Quadranten der Kurve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

(deren Punkte sich bekanntlich leicht aus denen des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ herleiten lassen) soll I. das auf eine der Koordinatenachsen bezogene Trägheitsmoment (T_x oder T_y) berechnet werden und II. der Trägheitshalbmesser ϱ.

Lösung. Man findet leicht

$$T_y = \tfrac{3}{8} q\varepsilon a^3 = \tfrac{1}{4} Ma^2;*$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2} a.$$

T_x hat offenbar denselben Wert wie T_y.

Aufgabe 148. Die cylindrische Gewölbfläche $A'C'CA$

---

* Hierbei — und im Folgenden immer — bedeutet M die Masse, wenn nicht etwa ausdrücklich anders bestimmt ist.

(Fig. 17) ist nach der gemeinen Kettenlinie CA gekrümmt, welcher, bezogen auf das angegebene rechtwinklige Koordinatensystem, die Gleichung

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

zukommt. Die Dimensionen $BA = a$, $OC = k$ (vergleiche Teil I, Aufg. 110) werden als bekannt vorausgesetzt.

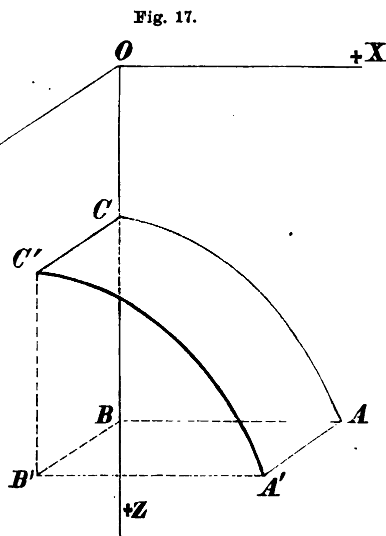


Fig. 17.

Das auf die Gerade BC bezogene Trägheitsmoment T der Wölblinie AC soll berechnet werden.

Lösung. Mit Beachtung des bei Nr. 55 des I. Teiles Gefundenen ergiebt sich leicht:

$$T = \tfrac{1}{2} kq\varepsilon \left\{ (a^2 - 2ak + 2k^2)e^{\frac{a}{k}} - (a^2 + 2ak + 2k^2)e^{-\frac{a}{k}} \right\}$$

oder

$$T = q\varepsilon \left\{ (a^2 + 2k^2)\, s - 2ak\,(c + k) \right\},$$

wobei c die Dimension BC bezeichnet, s aber die Länge des Wölbbogens AC (welche bekanntlich aus den Elementen c und k leicht konstruiert werden kann).

Aufgabe 149. Es soll unter Benutzung der bekannten für Polarkoordinaten geltenden Gleichungen (II. der Lösung zu Nr. 145) das Trägheitsmoment eines Kreisbogens berechnet werden, dessen Radius a und dessen Centriwinkel γ ist — und zwar

I. in Bezug auf einen Durchmesser OX, welcher durch den Anfang des Bogens geht;

II. für einen solchen OY, der senkrecht zu dem ersten steht;

III. soll man das Trägheitsmoment T und den Trägheitshalbmesser ϱ für die ganze Kreisperipherie angeben.

Lösung.

I. $T_x = \frac{1}{2} q \varepsilon a^3 (\gamma - \sin\gamma \cos\gamma);$

II. $T_y = \frac{1}{2} q \varepsilon a^3 (\gamma + \sin\gamma \cos\gamma);$

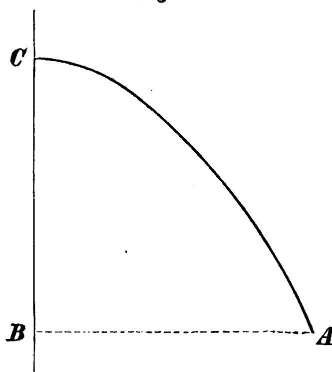
III. $T = \pi q \varepsilon a^3 = \frac{1}{2} M a^2;$

$$\varrho = \tfrac{1}{2} a \sqrt{2},$$

also gleich der Hälfte der zum Quadranten gehörigen Sehne.

Denen, welche bezüglich der Trägheitsmomente einfach gekrümmter Linien mehr Aufgaben zu lösen wünschen als hier gestellt wurden, sei empfohlen, das Trägheitsmoment eines nach einer gemeinen Parabel gekrümmten Stabes AC (Fig. 18) zu behandeln für den Fall, dafs die Drehachse BC mit der Parabelachse zusammenfällt und die Dimensionen $BA = a$, $BC = c$ gegeben sind. Dies führt, wenn ohne Benutzung von Näherungen gerechnet wird, auf das

Fig. 18.



$$\int x^2 \sqrt{a^4 + 4c^2 x^2}\, dx,$$

dessen Wert bekanntlich leicht angegeben werden kann.

Es sei ferner empfohlen, diese Aufgabe näherungsweise für den Fall zu lösen, dafs $\sqrt{1 + y'^2}$ (siehe Lösung von Nr. 145) nach dem binomischen Satze entwickelt und hierbei auf diejenigen Potenzen von y' verzichtet werden darf, welche höher sind als die zweite.

Durch ein geeignetes Zahlenbeispiel die Näherungsrechnung mit der strengen Herleitung zu vergleichen, wird für Manche ratsam sein.

b) Linien im Raume.

Aufgabe 150. Die Horizontal- und die Vertikalprojektion einer Kurve AB haben die Gleichungen $y = f(x)$, bezüglich $z = \varphi(x)$. Dem Anfangspunkte A kommt die Abscisse a, dem Endpunkte B die Abscisse b zu. Die auf die drei Koordinatenachsen bezogenen Trägheitsmomente T_x, T_y und T_z sind anzugeben.

Lösung.

$$T_x = q\varepsilon \int_a^b (y^2 + z^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

$$T_y = q\varepsilon \int_a^b (x^2 + z^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

$$T_z = q\varepsilon \int_a^b (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Aufgabe 151. Eine Stange (materielle Gerade) AB, welche die Länge L hat, steht mit ihrem Anfangspunkte A um b von einer Drehachse ab, mit der sie nicht in derselben Ebene liegt, und bildet mit ihr den Winkel α. Nimmt man diese Drehachse als x-Achse, die von A darauf gefällte Senkrechte als y-Achse und wählt die z-Achse vertikal zur xy-Ebene, so schliefst AB mit den beiden letztgenannten Linien die Winkel β und γ ein. Das Trägheitsmoment T_x ist zu bestimmen.

Lösung. Zunächst ergiebt sich (nach Nr. 150)

$$T_x = q\varepsilon \int_0^{L\cos a} \left[\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x + b\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}x\right)^2\right] \sec\alpha\, dx,$$

schliefslich aber

$$T_x = \tfrac{1}{3}\,(L^2 \sin^2\alpha + 3b\,L\cos\beta + 3b^2)\,M.$$

Die Anwendung auf besondere Fälle ist zu empfehlen.

Aufgabe 152. Wie Nr. 148, jedoch soll (siehe Fig. 17) das auf BC bezogene Trägheitsmoment T' der Wölblinie $A'C'$ berechnet werden, welche eine der Kurve AC kongruente Kettenlinie ist. Aufser den Dimensionen $BA = a$ und $OC = k$ kennt man die Länge b der Seite BB' des überwölbten Rechtecks $ABB'A'$.

Lösung. Mit Benutzung der Lösung von Nr. 148 erhält man sehr leicht

$$T' = \tfrac{1}{2}kq\varepsilon \left\{(a^2 + b^2 - 2ak + 2k^2)e^{\frac{a}{k}} - (a^2 + b^2 + 2ak + 2k^2)e^{-\frac{a}{k}}\right\},$$

wofür auch

$$T' = q\varepsilon\,\{(a^2 + b^2 + 2k^2)\,s - 2ak\,(c + k)\}$$

gesetzt werden darf. Dabei ist $c = BC = B'C'$ und s die (aus c und k leicht konstruierbare) Länge des Wölbbogens $A'C'$ oder AC.

Aufgabe 153. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems ist die Kurve $z = \frac{1}{2} x^2$ gezeichnet (nämlich die Parabel

$$z = \frac{x^2}{2a},$$

für welche $a = 1$); in der xy-Ebene die andere Kurve $y = \frac{2}{3} \sqrt{2x^3}$ (nämlich die Parabelevolute

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2x^3}{a}},$$

für welche ebenfalls $a = 1$). Über der Ersteren dieser Linien steht eine Cylinderfläche parallel zur y-Achse, über der Letzteren eine der z-Achse gleichgerichtete.

Für die von Null bis x gerechnete Durchschnittslinie der beiden Flächen sollen die Trägheitsmomente T_x und T_y bestimmt werden.

Lösung. $T_x = \frac{1}{360} q\varepsilon (80 + 82x + 15x^2) x^4,$

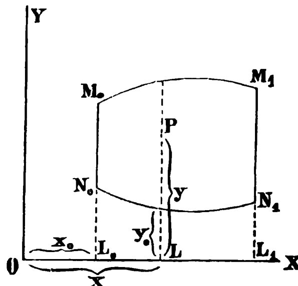
$T_y = \frac{1}{120} q\varepsilon (40 + 30x + 6x^2 + 5x^3) x^3.$

B. Trägheitsmomente von Flächen.

a) Ebene Flächen.

α) *Drehachse in der Ebene.*

Fig. 19.



Aufgabe 154. Eine Fläche $M_0M_1N_1N_0$ (Fig. 19) von der konstanten Dicke δ* wird oben und unten durch zwei Kurven M_0M_1 und N_0N_1 begrenzt, denen, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, die Gleichungen

$$y_1 = f_1(x),$$
$$y_0 = f_0(x)$$

zukommen.

* Die Dicke δ möge bei den unter B. stehenden Aufgaben immer vorausgesetzt werden.

Welches Trägheitsmoment (T_x) besitzt der von x_0 bis x_1 gerechnete Teil jener Fläche in Bezug auf die Achse der Abscissen und welches andere (T_y) bezogen auf die der Ordinaten?

Lösung.

$$T_x = \tfrac{1}{3}\,\delta\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (y_1{}^3 - y_0{}^3)\, dx,$$

$$T_y = \delta\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\, x^2\, dx.$$

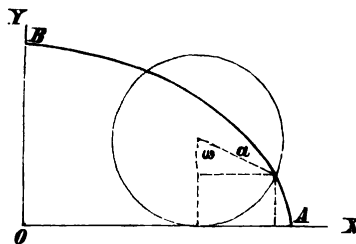
Aufgabe 155. Es sollen die auf die Halbachsen a und b bezogenen Trägheitsmomente T_a und T_b, nebst den zugehörigen Trägheitshalbmessern ϱ_a und ϱ_b für einen Ellipsenquadranten berechnet werden.

Lösung. T_a und T_b sind zunächst Doppelintegrale mit elliptischen Grenzen. Wandelt man die Letzteren auf die bekannte Weise in konstante Grenzen um, so erhält man sehr schnell

$$T_a = \tfrac{1}{16}\,\pi\delta\varepsilon a b^3 = \tfrac{1}{4}\, b^2 M,$$
$$T_b = \tfrac{1}{16}\,\pi\delta\varepsilon a^3 b = \tfrac{1}{4}\, a^2 M,$$
$$\varrho_a = \tfrac{1}{2}\, b,$$
$$\varrho_b = \tfrac{1}{2}\, a.$$

Aufgabe 156. Für die Fläche AOB einer gemeinen Cycloide (Fig. 20) sind T_x, T_y, ϱ_x und ϱ_y zu berechnen.

Fig. 20.



Lösung. Man findet zuerst

$$T_x = \tfrac{1}{3}\,\delta\xi a^4 \int_0^{\pi} (1 - \cos\omega)^4 d\omega$$

und damit dann

$$T_x = \tfrac{35}{24}\,\pi\delta\varepsilon a^4 = \tfrac{35}{36}\, a^2 M.$$

Ferner

$$T_y = \delta\varepsilon a^4 \int_0^{\pi} (1 - \cos\omega)^2\, (\pi - \omega + \sin\omega)^2\, d\omega$$

oder

$$T_y = 4\,\delta\varepsilon a^1 \int_0^{\pi} (\pi - \omega + \sin\omega)^2\, \sin^4 \frac{\omega}{2}\, d\omega.$$

Dies liefert nach leichter Zwischenrechnung

$$T_y = \pi\delta\varepsilon\,\frac{12\pi^2 - 35}{24}\,\alpha^4 = \tfrac{1}{36}\,(12\pi^2 - 35)\,a^2\,M.$$

Es ist daher

$$\varrho_x = \tfrac{1}{6}\sqrt{35}\,a,$$

$$\varrho_y = \tfrac{1}{6}\sqrt{12\,\pi^2 - 35}\,a.$$

Aufgabe 157. Eine Fläche $B_0\,C_0\,C_1\,B_1$ ist durch zwei Kurven $B_0\,C_0$, $B_1\,C_1$ (vergl. Fig. 7 auf S. 51 des I. Teiles), deren Polargleichungen

$$r_0 = f_0\,(\theta), \quad r_1 = f_1\,(\theta)$$

sind, und durch zwei Leitstrahlen B_0B_1, C_0C_1, welche zu den Anomalien $A_0OB_0 = \theta_0$, $A_0OC_0 = \theta_1$ gehören, begrenzt.

I. Welche Werte haben die Trägheitsmomente T_x und T_y?

II. Wie lauten dieselben dann, wenn die Fläche ein voller Kreisring ist, dessen Radien a und b sind?

III. Welches ist der Trägheitshalbmesser ϱ dieses Ringes und wie läfst er sich aus den Elementen a und b konstruieren?

Lösung.

I. $$T_x = \tfrac{1}{4}\,\delta\varepsilon\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_1^{\,4} - r_0^{\,4})\,\sin^2\theta\,d\theta,$$

$$T_y = \tfrac{1}{4}\,\delta\varepsilon\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_1^{\,4} - r_0^{\,4})\,\cos^2\theta\,d\theta.$$

II. $$T_x = T_y = \tfrac{1}{4}\,\pi\delta\varepsilon\,(a^4 - b^4).$$

III. $$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

also die Hälfte der zu den Katheten a und b gehörenden Hypotenuse.

Aufgabe 158. Die bei der vorhergehenden Lösung unter I. gefundenen Gleichungen sollen benutzt werden, um für einen elliptischen Ring die auf seine Achsen bezogenen Trägheitsmomente T_a und T_b zu berechnen. Die innere Ellipse hat die Halbachsen a und b, die äufsere a_1 und b_1.

Lösung. Zunächst kommt man auf

$$\tfrac{1}{4}T_a = \tfrac{1}{4}\delta\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{(\alpha_1^{\,2}\cos^2\theta + \beta_1^{\,2}\sin^2\theta)^2} - \frac{1}{(\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta)^2}\right]\sin^2\theta\,d\theta,$$

worin α_1, β_1, α, β, die reciproken Werte von a_1, b_1, a und b sind. Schliefslich ergiebt sich

$$T_a = \tfrac{1}{4}\,\pi\delta\varepsilon\,(a_1\,b_1{}^3 - ab^3)$$

und

$$T_b = \tfrac{1}{4}\,\pi\delta\varepsilon\,(a_1{}^3\,b_1 - a^3 b),$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$T_a = \tfrac{1}{4}\,(M_1\,b_1{}^2 - Mb^2),$$

bezüglich

$$T_b = \tfrac{1}{4}\,(M_1\,a_1{}^2 - Ma^2),$$

wenn M_1 die Masse der äufseren, M die der inneren Ellipse bezeichnet.

Man vergleiche diese Resultate mit denen von Nr. 155.

β) *Drehachse senkrecht zur Ebene.*

Aufgabe 159. Es soll für die in Nr. 154 bezeichnete Fläche das auf die (senkrecht zur xy-Ebene stehende) z-Achse bezogene Trägheitsmoment T_z berechnet und nachher mit T_x nebst T_y verglichen werden.

Lösung.

$$T_z = \delta\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\{x^2\,(y_1 - y_0) + \tfrac{1}{3}\,(y_1{}^3 - y_0{}^3)\}\,dx;$$

$$T_z = T_x + T_y.$$

Aufgabe 160. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten a und b. Man soll für eine zu seiner Fläche normal stehende und durch den Scheitel des rechten Winkels gehende Achse das Trägheitsmoment T und den Trägheitshalbmesser ϱ berechnen, für letzteren auch eine Konstruktion angeben.

Lösung.

$$T = \tfrac{1}{12}\,\delta\varepsilon ab\,(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{6}\,(a^2 + b^2)\,M$$

oder, wenn mit c die Länge der Hypotenuse bezeichnet wird,

$$T = \tfrac{1}{12}\,\delta\varepsilon abc^2 = \tfrac{1}{6}\,c^2\,M.$$

Daher

$$\varrho = \frac{c}{\sqrt{6}} = \tfrac{1}{6}\,c\sqrt{6},$$

was als geometrisches Mittel zu c und $\tfrac{1}{6}\,c$ konstruiert werden kann.

Aufgabe 161. Für ein regelmäfsiges Sechseck (Seiten-

länge a) sind T_z und ϱ in Bezug auf die durch den Mittelpunkt gelegte Achse zu bestimmen.

Lösung. Am geschicktesten ist es, zunächst $\frac{1}{12} T_z$ zu berechnen, indem man eines der sechs gleichseitigen Dreiecke so legt, dafs es von der x-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems halbiert wird. Es ergiebt sich

$$T_z = \tfrac{5}{8} \sqrt{3}\, \delta \varepsilon a^4 = \tfrac{5}{12} a^2 M;$$

$$\varrho = \sqrt{\tfrac{5}{12}}\, a.$$

Aufgabe 162. Das letzte der unter Nr. 159 gefundenen Resultate soll angewendet werden, um T_z nebst dem zugehörigen ϱ für einen Ellipsenquadranten zu ermitteln.

Lösung. Man erhält

$$T_z = \tfrac{1}{4} (a^2 + b^2) M;$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2},$$

und zwar, wenn die Lösung von Nr. 155 benutzt werden darf, ohne alle Rechnung.

Aufgabe 163. Wie 162, doch liegt nicht ein Ellipsenquadrant vor, sondern die in Fig. 20 gezeichnete halbe Cycloidenfläche.

Lösung.

$$T_z = \tfrac{1}{2} \pi^3 \delta \varepsilon a^4 = \tfrac{1}{3} \pi^2 a^2 M;$$

$$\varrho = \tfrac{1}{3} \sqrt{3}\, \pi a,$$

nach Nr. 156.

Aufgabe 164. Für die in Nr. 157 näher bezeichnete Fläche soll T_z bestimmt und mit T_x nebst T_y verglichen werden. Ferner soll man die gefundenen Ergebnisse benutzen, um T_z und ϱ für einen vollständigen Kreisring anzugeben, dessen innere und äufsere Radien b, bezüglich a, sind.

Lösung.

$$T_z = \tfrac{1}{4} \delta \varepsilon \int_{\theta_0}^{\theta_1} (r_1^4 - r_0^4)\, d\theta;$$

$$T_z = T_x + T_y.$$

Für den Kreisring:

$$T_z = \tfrac{1}{2} \pi \delta \varepsilon (a^4 - b^4) = \tfrac{1}{2} (a^2 + b^2) M;$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2} \sqrt{2 (a^2 + b^2)}.$$

b) Umdrehungsflächen.

Aufgabe 165. Eine ebene Kurve $A_0 A_1$, deren Gleichung

$$z = f(x)$$

ist, dreht sich um die z-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Kurve wird von x_0 bis x_1 oder von z_0 bis z_1 gerechnet. Das Trägheitsmoment T_z und der zugehörige Trägheitshalbmesser ϱ sollen für die zum Drehwinkel ω gehörende Rotationsfläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ bestimmt werden.

Lösung.

$$T_z = \delta \varepsilon \omega \int_{x_0}^{x_1} x^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

oder auch

$$T_z = \delta \varepsilon \omega \int_{z_0}^{z_1} x^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dz.$$

Ferner

$$\varrho = \sqrt{\frac{T_z}{M}},$$

wobei

$$M = \delta \varepsilon \omega \int_{x_0}^{x_1} x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \delta \varepsilon \omega \int_{z_0}^{z_1} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dz.$$

Aufgabe 166. Ein abgestumpfter Kegel hat a_2 und a_1 als Halbmesser der Parallelflächen, h als Stumpfhöhe. Das T_z und das ϱ seiner Mantelfläche sind zu berechnen, auch ist für ϱ eine Konstruktion anzugeben.

Lösung.

$$T_z = \tfrac{1}{2} \pi \delta \varepsilon (a_2^2 + a_1^2)(a_2 + a_1) \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + h^2}$$

oder, da die Masse M des Mantels gleich $\pi \delta \varepsilon (a_2 + a_1) \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + h^2}$ ist,

$$T_z = \tfrac{1}{2} (a_2^2 + a_1^2) M,$$

folglich

$$\varrho = \tfrac{1}{2} \sqrt{2 (a_2^2 + a_1^2)},$$

was leicht konstruiert werden kann als Hälfte der zu den Katheten $a_2 \sqrt{2}$ und $a_1 \sqrt{2}$ gehörenden Hypotenuse.

Aufgabe 167. Um eine Achse OZ, die ihn in einem seiner Endpunkte berührt, dreht sich ein Viertelkreis, dessen Radius a ist. T_z und ϱ sollen für die erzeugte Rotationsfläche berechnet werden.

Lösung. Zuerst ergiebt sich

$$T_z = 2\pi\delta\varepsilon a \int_0^a \frac{x^3}{\sqrt{2ax - x^2}} dx;$$

hieraus dann

$$T_z = \tfrac{1}{6}\pi(15\pi - 44)\delta\varepsilon a^4.$$

Für die Masse findet man

$$M = \pi(\pi - 2)\delta\varepsilon a^2,$$

hat mithin

$$\varrho = \sqrt{\frac{15\pi - 44}{6(\pi - 2)}}\, a.$$

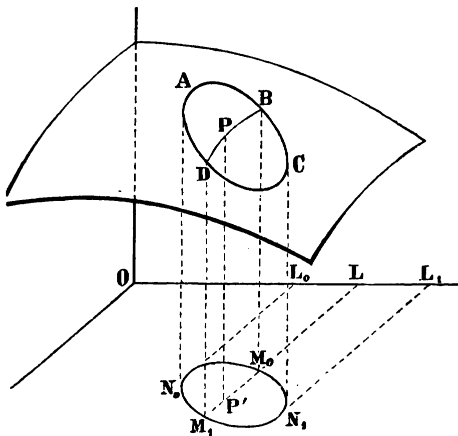
c) Allgemein krumme Flächen.

Aufgabe 168. Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem ist eine Fläche (Fig. 21) durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

gegeben. Die xy-Projektion eines gewissen Teiles derselben wird durch zwei Kurven $N_0 M_0 N_1$ und $N_0 M_1 N_1$ begrenzt, welche die Gleichungen $y_0 = f_0(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ haben. Sie werden von der Abscisse $OL_0 = x_0$ bis zu der Abscisse $OL_1 = x_1$ gerechnet. Man soll die auf die drei Koordinatenachsen bezogenen Trägheitsmomente T_x, T_y und T_z ermitteln.

Fig. 21.



Lösung.

$$T_x = \delta\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (y^2 + z^2)\, R\, dx\, dy,$$

$$T_y = \delta\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (x^2 + z^2)\, R\, dx\, dy,$$

$$T_z = \delta\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (x^2 + y^2)\, R\, dx\, dy,$$

wobei

$$R = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Aufgabe 169. Um den Mittelpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist ein Kugeloktant konstruiert, dessen Radius die Länge a besitzt. In der xy-Ebene befindet sich ein Halbkreis über der x-Achse, welcher den Halbmesser $\frac{1}{2}a$ hat und von der y-Achse berührt wird. Das Trägheitsmoment T_z und der zugehörige Trägheitshalbmesser ϱ sollen für den über diesem Halbkreise liegenden Kugelflächenteil berechnet werden.

Lösung. Man kommt zunächst auf

$$T_z = \delta\varepsilon a \int_0^a \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

Hier empfiehlt sich, aus naheliegenden Gründen, die Einführung von Polarkoordinaten.

Es resultiert

$$T_z = \tfrac{1}{9}(3\pi - 7)\,\delta\varepsilon a^4$$

Da nun (Lösung der Aufg. 83 des ersten Teiles) die Masse

$$M = \tfrac{1}{2}(\pi - 2)\,\delta\varepsilon a^2$$

ist, so kann man auch schreiben

$$T_z = \frac{2\,(3\pi - 7)}{9\,(\pi - 2)}\, a^2,$$

hat also

$$\varrho = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{2\,(3\pi - 7)}{\pi - 2}}\; a.$$

C. Trägheitsmomente von Körpern.

a) Umdrehungskörper.

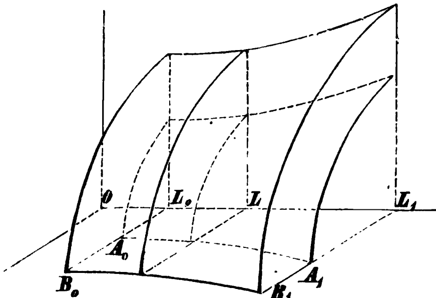
α) *Drehachse die geometrische Achse.*

Aufgabe 170. In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist die Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ (Fig. 22) vorgeschrieben, die von der Abscisse $OL_0 = x_0$ bis zu der Abscisse $OL_1 = x_1$ gerechnet wird. Die Gleichungen der sie begrenzenden Kurven $A_0 A_1$, bezüglich $B_0 B_1$, lauten

$$y_0 = f_0(x) \text{ und } y_1 = f_1(x).$$

Jene Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ dreht sich ein volles Mal um die x-Achse und erzeugt dadurch einen allgemeinen Rotationskörper, dessen auf jene Achse bezogenes Trägheitsmoment T_x berechnet werden soll.

Fig. 22.



Lösung. Für die vorliegenden rechtwinkligen Koordinaten ist T_x zunächst ein dreifaches Integral; führt man aber, was offenbar der Natur des Umdrehungskörpers besser entspricht, cylindrische ein (r, ω und x), so erhält man schliefslich ein einfaches, nämlich

$$T_z = \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon \int_{x^0}^{x_1} (y_1^4 - y_0^4)\, dx.$$

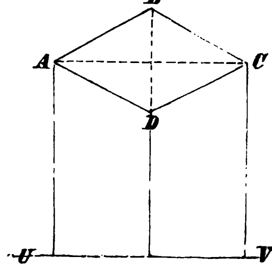
Ist der Rotationskörper nicht hohl, sondern massiv, so geht diese Gleichung über in

$$T_x = \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} y_1^4 dx.$$

Aufgabe 171. Ein Rhombus, dessen Diagonalen $AC = 2a$ und $BD = 2b$ sind (Fig. 23), dreht sich ein volles Mal um die Achse UV, welche parallel zu AC im Abstande c liegt.

Man soll für den erzeugten Ring (Schwungrad mit Rhombusquerschnitt) das auf die Rotationsachse bezogene Trägheitsmoment T_x und den zugehörigen Trägheitshalbmesser ϱ berechnen, auch für letzteren eine Konstruktion nennen.

Fig. 23.



Lösung. Es ergiebt sich

$$T_x = 8\pi\varepsilon bc\int\limits_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)\left\{c^2+b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right\}dx$$

und hieraus

$$T_x = 2\pi\varepsilon abc(b^2+2c^2).$$

Für die Masse M des Ringes liefert die Guldin'sche Regel

$$M = 4\pi\varepsilon abc;$$

mithin ist

$$T_x = \tfrac{1}{2}M(b^2+2c^2);$$

daher

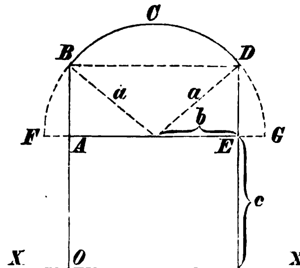
$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+2c^2)},$$

folglich als Hälfte der zu den beiden Katheten $b\sqrt{2}$ und $2c$ gehörenden Hypotenuse leicht konstruierbar.

Aufgabe 172. I. Das Trägheitsmoment T_x desjenigen Ringes (Schwungrades) soll berechnet werden, welcher entsteht, wenn sich der Querschnitt $ABCDE$ (Fig. 24) um die Achse XOX dreht;

II. soll angegeben werden, wie jenes T_x lautet, wenn der genannte Querschnitt in den Halbkreis $FBCDG$ übergeht.

Fig. 24.



Lösung.

$$T_x = \tfrac{1}{30}\pi\varepsilon\Big\{2b(15a^4+3b^4-10a^2b^2+90a^2c^2-30b^2c^2)$$
$$+15bc(5a^2-2b^2+4c^2)\sqrt{a^2-b^2}$$
$$+15a^2c(3a^2+4c^2)\arcsin\frac{b}{a}\Big\}.$$

In dem genannten besonderen Falle:

$$T_x = \tfrac{1}{60}\,\pi\varepsilon a^2\,\{16a(2a^2 + 15c^2) + 15\pi c(3a^2 + 4c^2)\}.$$

Aufgabe 173. Ein Rotationsparaboloid von der Höhe h und dem Halbparameter p wird durch ein anderes ausgehöhlt, welches dieselbe Achse hat, dessen Scheitel von dem des ersten um a absteht und dessen Halbparameter q ist. Zu berechnen T_x unter Benutzung der ersten bei Nr. 170 angegebenen Gleichung.

Lösung. Zunächst findet man

$$T_x = \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon\left\{\int_0^a 4p^2x^2dx + \int_a^h [4p^2x^2 - 4q^2(x-a)^2]dx\right\};$$

dies liefert schliefslich

$$T_x = \tfrac{2}{3}\pi\varepsilon\{p^2h^3 - q^2(h-a)^3\}.$$

Geht das hohle Paraboloid in ein massives über, so wird diese Gleichung zu der sehr bekannten

$$T = \tfrac{2}{3}\pi\varepsilon p^2h^3.$$

Die letzte Formel kann, wie man leicht übersieht, auch benutzt werden, um die vorhergehende zu erhalten.

Ferner können auch die Massen

$$M_1 = \pi\varepsilon p h^2 \text{ und } M_2 = \pi\varepsilon q(h-a)^2$$

zur Einführung gelangen.

Aufgabe 174. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt ein mit dem Halbmesser a konstruierter Viertelkreis derartig, dafs die Achsen der x und z ihn berühren. Das Trägheitsmoment T_x und der zugehörige Trägheitshalbmesser ϱ sollen für denjenigen massiven Rotationskörper berechnet werden, welcher entsteht, wenn der genannte Quadrant um die Abscissenachse eine volle Umdrehung macht.

Lösung. Hier empfiehlt sich offenbar die Benutzung von Polarkoordinaten.

Es entsteht

$$T_x = \tfrac{1}{120}\,\pi(332 - 105\pi)\varepsilon a^5 = 0{,}0558\,\varepsilon a^5.$$

Für die Masse ergiebt sich

$$M = \tfrac{1}{6}\,\pi(10 - 3\pi)\varepsilon a^3.$$

Mithin ist

$$\varrho = \sqrt{\frac{332 - 105\pi}{20(10 - 3\pi)}}\, a = 0{,}43\, a.$$

β) Drehachse senkrecht zur geometrischen Achse.

Aufgabe 175. Es soll für den in Nr. 170 bezeichneten allgemeinen Umdrehungskörper das auf die z-Achse bezogene Trägheitsmoment T_z berechnet werden.

Lösung. Bei Verwendung cylindrischer Koordinaten, die hier jedenfalls am geeignetsten sind, erhält man leicht

$$T_z = \pi\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \{x^2 + \tfrac{1}{4}(y_1^2 + y_0^2)\}(y_1^2 - y_0^2)\, dx$$

oder, für die Anwendung brauchbarer geschrieben,

$$T_z = \pi\varepsilon \left\{ \int_{x_0}^{x_1} x^2 (y_1^2 - y_0^2)\, dx + \tfrac{1}{4}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^4 - y_0^4)\, dx \right\}.$$

Aufgabe 176. Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist erzeugt worden, indem sich die von $x = 0$ bis $x = a$ gerechnete semikubische Parabel

$$y_1 = b + x\sqrt{x}$$

ein volles Mal um die Abscissenachse drehte. Der Körper besitzt eine cylindrische Aushöhlung vom Durchmesser $2b$, deren Achse mit der der x zusammenfällt. T_z ist zu ermitteln.

Lösung. Die unter der vorigen Nummer angegebenen Gleichungen liefern

$$T_z = \pi\varepsilon a^2 h (\tfrac{1}{28} a^4 \sqrt{a} + \tfrac{1}{6} a^3 \sqrt{a} + \tfrac{2}{11} a^3 b + \tfrac{4}{9} a^2 b + \tfrac{3}{8} a\sqrt{a}\, b^2 + \tfrac{2}{5} b^3).$$

Aufgabe 177. Welches Trägheitsmoment T_z hat ein massiver Kegel (Basisradius b, Höhe h) bezogen auf eine Drehachse, welche aufserhalb desselben, auf der Seite der Kegelspitze, im Abstande a von der letzteren liegt, die Kegelachse schneidet und senkrecht zu ihr steht?

Welchen Wert besitzt dieses T_z dann, wenn die Drehachse durch die Spitze geht?

Lösung.

$$T_z = (a^2 + \tfrac{3}{2} ah + \tfrac{3}{5} h^2 + \tfrac{3}{20} b^2)\, M$$

und in dem genannten speciellen Falle:

$$T_z = \tfrac{3}{20}(b^2 + 4h^2)M.$$

Aufgabe 178. Das Doppelte des in Nr. 174 vorgeschriebenen Umdrehungskörpers ist derartig gelegen, dafs es von der yz-Ebene halbiert wird, letztere nämlich den mit dem Radius a beschriebenen Parallelkreis des Rotationskörpers in sich enthält; T_z und das zugehörige ϱ sind zu bestimmen.

Lösung.

$$T_z = \tfrac{1}{40}\pi\varepsilon(268 - 85\pi)a^5.$$

$$M = \tfrac{1}{3}\pi\varepsilon(10 - 3\pi)a^3.$$

Daher

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3(268-85\pi)}{10(10-3\pi)}}\,a.$$

Aufgabe 179. Für eine massive Kugel, welche den Radius a hat, sollen T_z und ϱ in Bezug auf eine Drehachse berechnet werden, die vom Mittelpunkte um $c\ (> a)$ entfernt ist und einen Durchmesser senkrecht schneidet.

Lösung. Am besten mit Benutzung von Polarkoordinaten ergiebt sich

$$T_z = \tfrac{1}{5}(2a^2 + 5c^2)M,$$

also

$$\varrho = \sqrt{\frac{2a^2 + 5c^2}{5}}.$$

b) Körper, welche nicht von Umdrehungsflächen begrenzt werden.

Aufgabe 180. Eine gerade, regelmäfsige, sechsseitige Pyramide ist durch ihre Höhe h und durch die Grundflächenseite a gegeben. Es soll durch dreifache Integration (vergl. Nr. 181) das auf ihre Achse bezogene T bestimmt und auch ϱ ermittelt werden.

Lösung. Wenn man die Pyramide geschickt gegen das Koordinatensystem legt, so hat man sehr schnell $\tfrac{1}{12}T$, damit dann auch T, nämlich

$$T = \tfrac{1}{8}\sqrt{3}\,\varepsilon a^4 h,$$

$$T = \tfrac{1}{4}a^2 M,$$

mithin

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\, a,$$

also einen recht hübschen einfachen Satz.

Aufgabe 181. Die vorige Aufgabe soll gelöst werden, indem man die Pyramide parallel zur Grundfläche in unendlich dünne Schichten zerlegt, die Trägheitsmomente dieser letzteren bestimmt und summiert.

Lösung. Man berechnet zunächst die Masse dM eines der schichtenförmigen Elemente, multipliciert dieselbe mit dem Quadrate ihres Trägheitshalbmessers (wobei die Lösung von Nr. 161 in Betracht kommt) und integriert. Das Integral ist hier (im Gegensatze zu Nr. 180) ein einfaches und zwar

$$T = \tfrac{5}{8} \sqrt{3}\, \varepsilon \frac{a^4}{h^4} \int_0^h (h - z)^4\, dz.$$

Es liefert selbstverständlich das vorige Resultat.

Aufgabe 182. Eine bei O durchaus rechtwinklige, dreiseitige Pyramide $OABC$ hat die Kantenlängen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Das auf a bezogene Trägheitsmoment T_a soll ermittelt werden, indem man sich den Körper parallel zur Ebene bc in unendlich dünne Schichten zerspalten denkt, für eine derselben dT_a bestimmt, etc. wie bei 181.

Ferner sollen die Trägheitsmomente T_b und T_c angegeben werden.

Lösung.

$$T_a = \tfrac{1}{12}\, \varepsilon \frac{bc\,(b^2 + c^2)}{a^4} \int_0^a (a - x)^4\, dx;$$

$$T_a = \tfrac{1}{60}\, \varepsilon\, abc\,(b^2 + c^2) = \tfrac{1}{10}\,(b^2 + c^2)\, M.$$

$$T_b = \tfrac{1}{10}\,(a^2 + c^2)\, M.$$

$$T_c = \tfrac{1}{10}\,(a^2 + b^2)\, M.$$

Aufgabe 183. Die Halbachsen a und b der Grundfläche eines elliptischen, geraden Kegels, wie auch seine Höhe h, sind

gegeben. Zu berechnen ist das für seine Achse geltende T und zwar durch einfache Integration.

Lösung. Mit Beachtung der zu Nr. 162 gehörenden Resultate hat man sehr leicht

$$T = \frac{\pi\varepsilon(a^2 + b^2)\,ab}{4h^4}\int_0^h (h - z)^4\,dz;$$

$$T = \tfrac{1}{20}\pi\varepsilon(a^2 + b^2)\,abh = \tfrac{3}{20}(a^2 + b^2)\,M.$$

Aufgabe 184. Von einem ganz allgemeinen, geraden Kegel kennt man die Höhe h, den Inhalt G der Grundfläche und ihren Trägheitshalbmesser ϱ. Mittelst einfacher Integration soll das auf die Höhenlinie bezügliche T berechnet werden.

Lösung.

$$T = \frac{\varepsilon\varrho^2 G}{h^4}\int_0^h (h - z)^4\,dz;$$

$$T = \tfrac{1}{5}\,Gh\,\varepsilon\varrho^2 = \tfrac{3}{5}\,M\varrho^2.$$

Aufgabe 185. Die Grundfläche eines Kegels besteht aus vier Cycloidenflächenquadranten [von denen Fig. 20 (bei Nr. 156) einen darstellt]; seine Höhe ist h. Die letzte Gleichung der vorhergehenden Nummer soll verwendet werden, um das auf die Kegelachse bezogene T zu berechnen.

Lösung. Der Trägheitshalbmesser der Basis wurde unter 163 ermittelt. Die Benutzung jenes Resultates liefert

$$T = \tfrac{1}{5}\,\pi^2 a^2 M = \tfrac{2}{5}\,\varepsilon\pi^3 a^4 h.$$

Aufgabe 186. Für das Ellipsoid sollen die auf die drei Achsen a, b, c bezogenen Trägheitsmomente ermittelt werden und zwar

I. durch dreifache Integration;

II. durch einfache, indem man in unendlich dünne Schichten zerlegt und das zu Nr. 162 gehörende Ergebnis benutzt.

Lösung.

$$\text{I.}\quad T_c = \varepsilon\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\int_0^{c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Nach Wegschaffung der elliptischen Grenzen führt dies auf

$$T_c = \tfrac{4}{15}\,\pi\varepsilon\,abc\,(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{5}\,(a^2 + b^2)\,M.$$

Daher ist

$$T_b = \tfrac{1}{5}\,(a^2 + c^2)\,M,$$

$$T_a = \tfrac{1}{5}\,(b^2 + c^2)\,M.$$

II. $$T = \frac{\pi\varepsilon\,(a^2 + b^2)\,ab}{2c^4}\int_0^c (c^2 - z^2)\,dz.$$

Resultate selbstverständlich wie bei I.

Aufgabe 187. Ein schiefabgeschnittenes, gerades Prisma hat als Grundfläche ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten $AB = a$ und $AD = b$ sind. Die drei Seitenkanten, welche in A, B und C stehen, besitzen die Längen c, c_1, c_2; die vierte, hierdurch bestimmte, ist c_3. Sie sind sämtlich bekannt.

Das auf die Kante c bezogene T_c wird gesucht.

Lösung.

$$T_c = \varepsilon\int_0^a\int_0^b\int_0^{c - \frac{c - c_1}{a}x - \frac{c - c_3}{b}y} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

oder auch

$$T_c = \varepsilon\int_0^a\int_0^b\int_0^{c - \frac{c - c_1}{a}x - \frac{c_1 - c_2}{b}y} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Daher schliefslich

$$T_c = \tfrac{1}{12}\,\varepsilon ab\{a^2\,(2c_3 + 3c_1 - c) + b^2\,(3c_3 + 2c_1 - c)\},$$

oder

$$T_c = \tfrac{1}{12}\,\varepsilon ab\{a^2\,(c + c_1 + 2c_2) + b^2\,(2c - c_1 + 3c_2)\}.$$

Bei gleich langen Seitenkanten liefert dies das sehr bekannte Resultat

$$T_c = \tfrac{1}{3}\,\varepsilon abc\,(a^2 + b^2).$$

D. Trägheitsmomente für parallele Achsen.

Aufgabe 188. I. Welche Beziehung besteht zwischen denjenigen einer ebenen Kurve zukommenden Trägheitsmomenten T und T_1, welche auf Drehachsen bezogen sind, die in der Kurvenebene parallel zu einander liegen?

II. Wie lautet diese Beziehung, wenn eine der Achsen durch den Schwerpunkt der Linie geht?

III. Wie folgt mittelst derselben aus dem unter Nr. 146 entwickelten T_2 das daselbst angegebene T der Geraden?

IV. In welchem Verhältnisse steht das auf eine Tangente bezogene Trägheitsmoment T_t einer vollen Kreislinie zu demjenigen T_d, welches für einen zu dieser Berührenden parallelen Durchmesser gilt?

Lösung. I. Man findet leicht

$$T_1 = T + 2k\,M\eta + k^2\,M,$$

wobei k die gegenseitige Entfernung der beiden Drehachsen und η der Abstand des Schwerpunktes der Masse M von der ursprünglichen Achse, also von derjenigen, auf welche T bezogen ist.

II. $$T_1 = T_0 + k_2\,M,$$

wenn für T in diesem speciellen Falle lieber T_0 geschrieben wird.

III. T folgt aus T_2, wenn man in die vorige Gleichung

$$k = c + \tfrac{1}{2}\,L\,\sin\alpha$$

einführt.

IV. T_t ist das Dreifache von T_d, wie sich aus dem unter Nr. 149, III angeführten Resultate sofort ergiebt.

Aufgabe 189. In einer Ebene, deren Begrenzung man kennt, liegen zwei parallele Drehachsen, bezüglich welcher sie die Trägheitsmomente T und T_1 besitzt. Der Zusammenhang zwischen den Letzteren wird gesucht.

Lösung. Die Resultate lauten, wie die unter I und II in der vorhergehenden Nummer angegebenen.

Aufgabe 190. I. Welche Trägheitsmomente T_A und T_B besitzt die Ellipsenfläche in Bezug auf Tangenten in den Endpunkten A und B ihrer grofsen und ihrer kleinen Achse?

II. Welche T_A und T_B hat — für Berührende in A und B (Fig. 20 bei Nr. 156) — die Cycloidenfläche?

Lösung. I. Mit Benutzung von Nr. 155 ergiebt sich sofort, dafs T_A fünfmal so grofs ist, wie das auf die kleine Ellipsenachse bezogene Trägheitsmoment; ebenso T_B das Fünffache von dem für die grofse Achse geltenden.

II. Die zu Nr. 156 gehörende Lösung liefert

$$T_A = \tfrac{1}{36}(48\pi^2 - 35)\, a^2 M$$

und

$$T_B = \tfrac{179}{36}\, a^2 M.$$

Aufgabe 191. Wie 189, doch für den Körper.

Lösung. Nimmt man die ursprüngliche der beiden Drehachsen (nämlich diejenige, auf welche T bezogen ist) als z-Achse eines rechtwinkligen Systems und legt die xz-Ebene desselben derartig, dafs sie die andere vorgeschriebene Drehachse in sich enthält, so ergiebt sich ohne alle Mühe

$$T_1 = T - 2k\,M\xi + k^2 M.$$

Dabei bedeutet ξ die Abscisse des Schwerpunktes.

Geht durch den Letzteren die eine der beiden Drehachsen, so wird

$$T_1 = T_0 + k^2 M,$$

wie bei Nr. 188 II und 189.

Diese Gleichung gilt auch dann noch, wenn die erste Achse zwar nicht durch den Schwerpunkt läuft, letzterer aber in derjenigen Ebene sich befindet, welche senkrecht zur gemeinschaftlichen Normale der beiden Drehachsen so liegt, dafs sie die ursprüngliche in sich enthält.

Aufgabe 192. Das unter Nr. 152 Gefundene soll aus dem unter Nr. 148 Gewonnenen hergeleitet werden, indem man die Lösung der Aufgabe 191 benutzt.

Lösung. Es gilt hier, wenn man die materielle Wölblinie als Körper auffafst, der Schlufssatz von Nr. 191. Dabei ist T_1 das T' von Nr. 152, ferner T_0 das T von 148, endlich ist b der Abstand der parallelen Drehachsen und

$$M = q\varepsilon s.$$

Dies liefert das unter Nr. 152 angegebene Resultat.

Aufgabe 193. I. Es soll (mit Benutzung von Nr. 186) das Trägheitsmoment T_1 eines aus den Halbachsen a, b und c konstruierten Ellipsoids für eine Drehachse berechnet werden, welche durch einen der Scheitel geht und der c-Achse gleichgerichtet liegt.

II. Desgleichen (unter Verwendung von Nr. 171 und Fig. 23) für einen durch Rotation eines Rhombus entstandenen Ring (Schwungrad mit Rhombusquerschnitt) in Bezug auf eine durch die äufserste Ringkante gehende Drehachse, welche der geometrischen Achse desselben parallel ist.

Lösung. I. Geht die Drehachse durch einen der beiden a-Scheitel, so hat man

$$T_1 = \tfrac{1}{8}(6a^2 + b^2)M;$$

läuft sie hingegen durch einen der b-Scheitel, so ist

$$T_1 = \tfrac{1}{8}(a^2 + 6b^2)M.$$

II. Für das Schwungrad ergiebt sich

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(3b^2 + 4bc + 4c^2)M.$$

Aufgabe 194. Ein schiefabgeschnittenes, gerades Prisma hat ein Quadrat mit der Seitenlänge a als Grundfläche. Zwei sich gegenüber liegende seiner Seitenkanten haben beide die Länge c_1, die anderen die Längen c und c_2.

Mit Benutzung der Lösung von Nr. 187 soll das Trägheitsmoment dieses Körpers für eine Drehachse berechnet werden, welche den Seitenkanten parallel ist und durch den Schwerpunkt geht.

Lösung. Nach Nr. 97 des ersten Teiles ist die Schwerpunktslage bekannt.

Es ergiebt sich

$$T_0 = \tfrac{1}{72}\,\varepsilon a^4 \frac{11c_1^2 + 2cc_1 - c^2}{c_1}$$

oder auch, weil die Masse

$$M = \varepsilon a^2 c_1$$

ist,

$$T_0 = \tfrac{1}{72}\,a^2 \frac{11c_1^2 + 2cc_1 - c^2}{c_1^2} M.$$

Aufgabe 195. Von einem allgemeinen Kegel, oder einer allgemeinen Pyramide, für welche die Gerade OM, die die Spitze O mit dem Grundflächenschwerpunkte M verbindet, die Länge a hat, kennt man das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine durch O allgemein gehende Achse DD. Es soll ermittelt werden

I. welchen Wert T_1 es für eine andere Drehachse D_1D_1 besitzt, die in dem auf OM gemessenen Abstande b von der

Spitze die Gerade OM unter dem Winkel α schneidet und parallel zu DD liegt;

II. wie grofs T_1 ist, für $b = \frac{3}{4} a$.

Lösung. I. Man findet leicht

$$T_1 = T - \tfrac{1}{2} b (3a - 2b) M \sin^2 \alpha.$$

II. Dies wird für $b = \frac{3}{4} a$ zu

$$T_1 = T - (\tfrac{3}{4} a \sin \alpha)^2 M,$$

wie es sein mufs, weil dann die Achse, auf welche T_1 bezogen ist, den Schwerpunkt in sich enthält.

Aufgabe 196. Ein gerader Cylinder besitzt die Höhe $2h$ und als Basis eine Cycloidenfläche, von welcher AOB (Fig. 20 bei Nr. 156) einer der vier kongruenten Quadranten ist.

Man soll, durch Anwendung des für parallele Drehachsen geltenden Satzes (Lösung zu 191) und mit Benutzung der unter Nr. 156 angegebenen Resultate, sein Trägheitsmoment berechnen

I. für eine Achse UU_1, welche durch den Schwerpunkt geht und dem längsten Durchmesser AA_1 der Basis gleichgerichtet liegt;

II. für eine andere VV_1, ebenfalls durch den Massenmittelpunkt laufende, die dem kürzesten Grundflächendurchmesser BB_1 parallel ist.

Lösung. Wir beziehen den Cylinder auf ein Koordinatensystem, dessen x-Achse mit AA_1, dessen y-Achse mit BB_1 und dessen z-Achse mit der geometrischen des Körpers zusammenfällt. Hierauf zerlegen wir ihn in Schichten, welche die Dicke dz haben und der Grundfläche parallel sind. Dann ergiebt sich leicht

$$T_U = \tfrac{1}{3} \pi \varepsilon a^2 (35 a^2 + 12 h^2) h$$

und

$$T_V = \tfrac{1}{3} \pi \varepsilon a^2 \{(12 \pi^2 - 35) a^2 + 12 h^2\} h,$$

in welche Gleichungen noch

$$M = 12 \pi \varepsilon a^2 h$$

eingeführt werden kann

Aufgabe 197. Das Trägheitsmoment T einer Kreisfläche, die den Radius a hat, soll für eine Drehachse AA berechnet werden, welche durch das Centrum O geht und mit der Fläche den Neigungswinkel β bildet. Die Ermittelung von T soll erfolgen,

indem man sich den Kreis in unendlich schmale Streifen zerlegt denkt, für einen derselben das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse $A_1 A_1$ bestimmt, welche parallel zu AA durch seinen Schwerpunkt geht, sodann auf AA überträgt (nach Nr. 191) und schliefslich alle diese Momente summiert (integriert).

Lösung. Unter Benutzung von Nr. 146 II und bei Verwendung eines in der Ebene des Kreises liegenden rechtwinkligen Koordinatensystems XOY, dessen Abscissenachse die Projektion von AA ist, kommt man leicht zu

$$T = 2 \int_{y=0}^{y=a} (\tfrac{1}{3} x^2 \sin^2 \beta + y^2)\, dM$$

und damit zuletzt auf

$$T = \tfrac{1}{4} \pi \delta \varepsilon a^4 (1 + \sin^2 \beta) = \tfrac{1}{4} a^2 (1 + \sin^2 \beta) M,$$

bei dessen Herleitung die Einführung von Polarkoordinaten sich empfiehlt.

Der Trägheitshalbmesser ist hiernach die Hälfte der zu den Katheten a und $a \sin \beta$ gehörenden Hypotenuse.

Für $\beta = 90^0$ gehen die vorstehenden Gleichungen über in die sehr bekannte

$$T = \tfrac{1}{2} a^2 M.$$

Aufgabe 198. Man soll, unter Anwendung des für parallele Drehachsen geltenden Satzes (Nr. 191) und mit Benutzung des in der vorhergehenden Lösung angegebenen Resultates, das Trägheitsmoment T eines geraden Kreiscylinders (Durchmesser $2a$, Höhe h) für eine Achse UU_1 berechnen, welche durch seinen Schwerpunkt geht und mit der Basis den Neigungswinkel β einschliefst.

Lösung. Auf dem in den vorigen Lösungen gezeigten Wege ergiebt sich

$$T = \tfrac{1}{12} \{ 3a^2 (1 + \sin^2 \beta) + h^2 \cos^2 \beta \} M,$$

was für $\beta = 0^0$ und 90^0 die für den Cylinder allgemein bekannten Formeln liefert.

Aufgabe 199. Ein schiefer Kreiscylinder hat den Basisradius a, die Achsenlänge L und ist unter dem Winkel β gegen

seine Grundfläche geneigt. Welchen Wert besitzt das für seine Achse geltende T?

Lösung. Das unter 197 angegebene Resultat verwendend, hat man sogleich

$$T = \frac{1}{4} a^2 (1 + \sin^2 \beta) M,$$

wobei

$$M = \pi \varepsilon a^2 L \sin \alpha$$

ist.

Aufgabe 200. Wie 199, doch für den schiefen Kreiskegel; a, L und β wie dort.

Lösung. Auch hier die Lösung von Nr. 197 benutzend erhält man

$$T = \frac{1}{20} \pi \varepsilon (1 + \sin^2 \beta) \sin \beta \, a^4 L = \frac{3}{20} (1 + \sin^2 \beta) a^2 M.$$

E. Trägheitsmomente für gegen einander geneigte Achsen.

Aufgabe 201. Auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem ist ein allgemeiner Körper bezogen. Das Trägheitsmoment T desselben soll für eine Achse OA berechnet werden, welche mit denen der x, y und z die Winkel α, β, γ bildet und durch den Koordinatenanfang O geht.

Lösung. Zunächst ist

$$T = \varepsilon \int\int\int p^2 \, dx \, dy \, dz,$$

wenn mit p der senkrechte Abstand von OA für das an der Stelle xyz liegende Element bezeichnet wird.

Drückt man p durch x, y, z, α, β, γ aus und benutzt die Abkürzungen

$$A = \int\int\int (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

$$B = \int\int\int (x^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

$$C = \int\int\int (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

$$D = \int\int\int yz \, dx \, dy \, dz,$$

$$E = \int\int\int xz \, dx \, dy \, dz,$$

$$F = \int\int\int xy \, dx \, dy \, dz,$$

so entsteht

$$T = \varepsilon\{A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \beta \cos \gamma - 2E \cos \alpha \cos \gamma - 2F \cos \alpha \cos \beta\}.$$

Hierbei sind (siehe die „Zusammenstellung" am Anfange des Capitels IV) die mit ε multiplicierten Integrale A, B und C die auf die drei Koordinatenachsen bezogenen Trägheitsmomente. Dies lehrt auch die letzte Gleichung, wenn man in derselben einen der drei Winkel gleich Null setzt, wobei die beiden anderen zu 90^0 werden.

Aufgabe 202. Es soll mit Benutzung der vorhergehenden Lösung das Trägheitsmoment des Ellipsoids berechnet werden

I. für eine Drehachse, welche durch den Schwerpunkt geht und mit den Halbachsen a, b, c die Winkel α, β, γ bildet;

II. für eine solche, die ebenso geneigt ist, jedoch um k vom Massenmittelpunkte absteht.

Lösung. I. Die Integrale A, B, C sind nach Nr. 186 bekannt; D, E, und F ergeben sich zu Null. Daher resultiert

$$T_0 = \tfrac{1}{5}\,(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta + c^2 \sin^2 \gamma)\, M.$$

II. Ferner (nach 191)

$$T_k = T_0 + k^2 M.$$

Aufgabe 203. Mit den Kantenlängen $OU = a$, $OV = b$, $OW = c$ ist eine bei O durchaus rechtwinklige, dreiseitige Pyramide konstruiert worden. Gesucht wird ihr Trägheitsmoment T in Bezug auf eine Drehachse, welche mit den genannten Kanten die Winkel α, β, γ einschliefst und die Spitze O in sich enthält.

Lösung. Nach Nr. 182 kennt man die drei ersten Glieder der hier geltenden letzten Gleichung von 201. Ferner ergiebt sich

$$\varepsilon D = \tfrac{1}{20}\, bc\, M, \quad \varepsilon E = \tfrac{1}{20}\, ac\, M, \quad \varepsilon F = \tfrac{1}{20}\, ab\, M.$$

Daher ist

$$T = \tfrac{1}{10}\{(b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (a^2 + c^2) \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) \cos^2 \gamma - bc \cos \beta \cos \gamma - ac \cos \alpha \cos \gamma - ab \cos \alpha \cos \beta\}\, M,$$

was für $\alpha = 0$, oder $\beta = 0$, oder $\gamma = 0$ wieder die nach 182 bekannten einfachen Formeln liefert.

Aufgabe 204. Welches Trägheitsmoment T entsteht, wenn das bei der Lösung von Nr. 201 gefundene Resultat auf den all-

gemeinen Umdrehungskörper angewendet wird, welcher in Nr. 170 näher beschrieben und in Fig. 22 skizziert wurde?

Lösung. Das Integral A ist nach Nr. 170 bekannt; B und C sind es durch 175; D, E und F verschwinden. Mithin wird

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon\cos^2\alpha\int_{x_0}^{x_1}(y_1^4 - y_0^4)dx + \pi\varepsilon\sin^2\alpha\int_{x_0}^{x_1}\{x^2 + \tfrac{1}{4}(y_1^2 + y_0^2)\}(y_1^2 - y_0^2)dx$$

oder auch

$$T = \tfrac{1}{4}\pi\varepsilon(2 - \sin^2\alpha)\int_{x_0}^{x_1}(y_1^4 - y_0^4)\,dx + \pi\varepsilon\sin^2\alpha\int_{x_0}^{x_1}x^2(y_1^2 - y_0^2)\,dx,$$

in welchem Ausdrucke man $\sin^2\beta + \sin^2\gamma$ für $2 - \sin^2\alpha$ setzen kann.

Aufgabe 205. Das unter Nr. 204 Ermittelte soll benutzt werden, um für einen geraden Kreiskegel (Höhe h, Basisradius c) das Trägheitsmoment T_1 bezogen auf eine Achse zu berechnen, welche im Abstande b von der Spitze (nach der Grundfläche hin) die geometrische Achse unter dem Winkel α schneidet.

Lösung. Mit Verwendung des unter Nr. 195 Gefundenen kommt man auf

$$T_1 = \tfrac{1}{20}\{6c^2 - (3c^2 - 12h^2 + 30bh - 20b^2)\sin^2\alpha\}M,$$

was den Einfluſs der Gröſsen a, b, c und h sofort erkennen läſst.

II. Trägheitsmomente ungleichförmig dichter Körper.

Aufgabe 206. Ein gerader Kreiskegel, dessen Basisradius a und dessen Höhe c ist, ändert seine Dichtigkeit ε proportional dem Abstande z von der Grundfläche. Für die Einheit des Letzteren ist ε gleich k.

Man soll das auf die geometrische Achse bezogene Trägheitsmoment T und den zugehörigen Trägheitshalbmesser ϱ durch dreifache Integration bestimmen.

Lösung. Unter Benutzung gemischter (cylindrischer) Koordinaten ergiebt sich zunächst

$$T = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3\,dr \int_0^{\frac{c}{a}(a-r)} z\,dz$$

und hieraus

$$T = \tfrac{1}{60}\,\pi k a^4 c^2.$$

Da man nun für die Masse

$$M = \tfrac{1}{12}\,\pi k a^2 c^2$$

findet (siehe Lösung der Aufgabe 3 des I. Teiles), so ist

$$T = \tfrac{1}{5}\,a^2 M,$$

$$\varrho = \tfrac{1}{5}\,a\sqrt{5} = a\sqrt{\tfrac{1}{5}},$$

was bekanntlich leicht konstruiert werden kann.

Aufgabe 207. Wie Nr. 206, doch sollen T und ϱ nicht unter Verwendung von Massenelementen mit drei unendlich kleinen Dimensionen hergeleitet werden, sondern indem man sich den Kegel in scheibenförmige, parallel zur Basis liegende, Elemente zerlegt denkt, Nr. 162 auf eines derselben anwendet und die Trägheitsmomente aller dieser Scheiben summiert.

Lösung. Das T für eines der genannten Massenelemente, welches in der Höhe z liegt und den Halbmesser x besitzt, ergiebt sich zu $\frac{1}{2}\,\pi k x^4 z dz$. Man hat also für den ganzen Kegel

$$T = \tfrac{1}{2}\,\pi k \int_0^c x^4\,z\,dz.$$

Nun folgt das bei 206 Angegebene, nur mufs jetzt M auch aus Scheiben zusammengesetzt werden.

Aufgabe 208. Wie Nr. 187, doch ist die Dichtigkeit ε veränderlich und zwar soll T_c berechnet werden

I. unter der Voraussetzung, dass ε sich umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes r von der Kante c ändert und für die Einheit dieser Entfernung gleich k ist;

II. unter der, dafs das Dichtigkeitsgesetz ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{kx}{r^2};$$

III. unter der, dafs

$$\varepsilon = \frac{ky}{r^2}$$

es darstellt, wobei x und y die senkrechten Abstände von den Ebenen cc_3, bezüglich cc_1, sind.

Lösung.

I. $T_c = \frac{1}{2} kab(c_1 + c_3) = \frac{1}{2} kab(c + c_2)$.

II. $T_c = \frac{1}{12} ka^2 b(3c_3 + 4c_1 - c) = \frac{1}{12} ka^2 b(3c_2 + c_1 + 2c)$.

III. $T_c = \frac{1}{12} kab^2(4c_3 + 3c_1 - c) = \frac{1}{12} kab^2(4c_2 - c_1 + 3c)$.

Aufgabe 209. Die Dichtigkeit ε einer massiven Kugel ändert sich nach koncentrischen Schalen derartig, dafs sie immer proportional dem Quadrate des Abstandes r vom Mittelpunkte ist und für die Einheit von r den Wert k hat. Der Kugelhalbmesser ist a. Das auf einen Durchmesser bezogene Trägheitsmoment T und der zugehörige Trägheitshalbmesser ϱ werden gesucht.

Lösung. Bei Verwendung polarer Koordinaten findet man leicht

$$T = \frac{8}{21} \pi k a^7.$$

Ferner für die Masse

$$M = \frac{4}{5} \pi k a^5,$$

daher

$$T = \frac{10}{21} a^2 M,$$

$$\varrho = a\sqrt{\frac{10}{21}}.$$

Capitel V.

Aufgaben über die Drehung um eine feste Achse.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Bei der Drehung eines starren Massensystems oder Körpers um eine feste Achse gelten bekanntlich die Beziehungen

$$1) \qquad w = \frac{d\theta}{dt},$$

$$2) \qquad \frac{Qa}{S} = \frac{dw}{dt},$$

für deren letzte auch

$$3) \qquad \frac{Qa}{S} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

oder

$$4) \qquad \frac{Qa}{S} = w\,\frac{dw}{d\theta}$$

geschrieben werden kann.

In denselben bedeutet w die Winkelgeschwindigkeit, θ den Drehwinkel, t die Zeit, Q diejenige Kraft, welche am Hebelarme a drehend auf das System wirkt, S das Trägheitsmoment des letzteren.

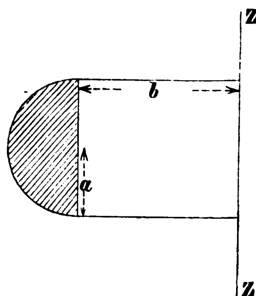
Die vier Gleichungen sind den bei der geradlinigen Bewegung (siehe „Zusammenstellung" am Anfange des Capitels I) angeführten ganz entsprechend und lassen sich ebenso wie diese verwenden.

Der Druck, den die Drehachse erleidet, wird bestimmt, indem man die von der festen Verbindung mit derselben herrührenden Widerstände durch Kräfte ersetzt und sodann alle wirkenden Kräfte in Komponenten zerlegt parallel zu der x- und y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt. Es führt nachher die Anwendung der für freie Bewegung geltenden Gesetze (Cap. I) zur Auffindung des Druckes. (Siehe die Aufgaben Nr. 227 bis 235 unter E.)

A. Gegeben eine Beziehung zwischen der drehenden Kraft Q und der Zeit t; einschliefslich: Q konstant.

Aufgabe 210. Ein kreisrunder Ring (Schwungrad), dessen Dimensionen und dessen Querschnitt die nebenstehende Figur angiebt, dreht sich um eine Achse ZZ. Er beginnt seine Bewegung mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit c. Es wirkt auf ihn nichts weiter als ein unveränderlicher Widerstand, welcher einer Kraft k gleichkommt, die am Hebelarme h der Bewegung tangential entgegengesetzt thätig ist.

Fig. 25.



Man soll berechnen, wie grofs Winkelgeschwindigkeit w und Drehwinkel θ zur Zeit t sind, um welche Zeit T der Ring stehen bleibt und welches die Gesamtdrehung Θ ist.

Lösung. Es sei zur Abkürzung

$$\frac{kh}{S} = A,$$

also (nach Nr. 172 II)

$$A = \frac{60kh}{\pi\varepsilon a^2\{16a(2a^2 + 15b^2) + 15\pi b(3a^2 + 4b^2)\}}.$$

Ferner mögen t und θ vom Beginne der Bewegung an gezählt werden, was offenbar das Natürlichste ist.

Die Resultate lauten dann

$$w = c - At,$$
$$\theta = ct - \tfrac{1}{2}At^2,$$
$$T = \frac{c}{A},$$
$$\Theta = \frac{c^2}{2A}.$$

Aufgabe 211. Mit einer vertikalen Achse ist durch eine starre, gewichtlose Gerade eine massive Kugel verbunden, welche um c mit ihrem Centrum absteht und den Halbmesser $a\,(<c)$ hat. Tangential zu dem mit c beschriebenen Kreise ist eine Kraft thätig, welche durch das Gewicht einer Wassermenge erzeugt wird, die sich durch Zuflufs regelmäfsig (der Zeit proportional) vermehrt,

anfänglich Null ist und für t gleich 1 das Gewicht k besitzt. Andere Kräfte wirken nicht; desgleichen keine Widerstände.

Berechnet soll werden, welche Winkelgeschwindigkeit w die Kugel zur Zeit t hat und wie grofs der Drehwinkel θ in diesem Augenblicke ist — wenn anfänglich keine Geschwindigkeit da war und wenn die Zeit vom Anfangszustande aus gezählt wird.

Lösung. Es ergiebt sich

$$w = \tfrac{1}{2} A t^2$$

und

$$\theta = \tfrac{1}{6} A t^3.$$

Hierbei ist A die Abkürzung für $\frac{kc}{S}$, mithin (nach Nr. 179)

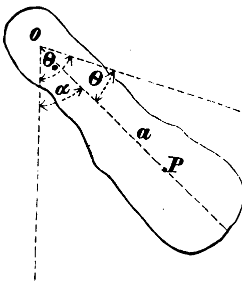
$$A = \frac{5kc}{(2a^2 + 5c^2) M}.$$

Die für w und θ gefundenen Gleichungen sprechen sehr einfache Sätze aus.

B. Gegeben eine Beziehung zwischen der Kraft Q und dem Drehwinkel θ.

Aufgabe 212. Um eine horizontale Achse dreht sich ein ganz allgemeiner Körper nur infolge seiner Schwere und ohne Widerstände. Massenmittelpunkt und Drehachse liegen um a (Fig. 26) auseinander. Der Körper besitzt die Masse M. Die Bewegung beginnt mit dem Anfangsausschlagwinkel θ_0 und der Anfangswinkelgeschwindigkeit w_0.

Fig. 26.



I. Welche Winkelgeschwindigkeit w hat dieses materielle Pendel für den Ausschlagwinkel $\alpha = \theta_0 - \theta$ und mit welcher (w_1) geht es, falls die Bewegung vom Ruhezustande aus beginnt, durch die vertikale Lage?

II. Welche Länge l mufs ein mathematisches Pendel erhalten, wenn es eben so schnell schwingen soll, wie jenes physische?

III. Für welchen gegenseitigen Abstand (a) des Schwerpunktes P und der Drehachse O schwingt der Körper am schnellsten, und wie grofs ist die zugehörige Länge l des mathematischen Pendels?

Lösung. I. Die Differentialgleichung der Drehbewegung lautet hier

$$w \frac{dw}{d\theta} = \frac{agM \sin \alpha}{S};$$

aus ihr folgt

$$w = \sqrt{\frac{2agM}{S}(\cos\alpha - \cos\theta_0) + w_0^2}$$

und für den genannten besonderen Fall

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{agM}{S}} \sin \tfrac{1}{2} \theta_0.$$

II. Mit Beachtung des Umstandes, dafs

$$v = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\theta_0)}$$

die Geschwindigkeit desjenigen mathematischen Pendels darstellt, welches die Länge l besitzt, folgt dann, dafs dieses l gleich sein mufs dem Trägheitsmomente des materiellen Pendels, dividiert durch dessen statisches Moment, wenn die Schwingungen gleich schnell erfolgen sollen.

III. Die Schwingungszeit des physischen Pendels ist dann am kürzesten, wenn der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt demjenigen Trägheitshalbmesser k gleichkommt, welcher sich auf eine Gerade bezieht, die, zur Drehachse parallel, durch den Massenmittelpunkt geht.

Das zugehörige mathematische Pendel hat die Länge

$$l = 2k.$$

Aufgabe 213. Ein massiver Kegel (Basishalbmesser b, Höhe h) schwingt um seine Spitze.

I. Wo liegt sein Schwingungsmittelpunkt?

II. Wie läfst sich dessen Lage konstruieren?

III. Welche Länge mufs h haben, wenn $b = \frac{1}{2} h$ ist und der Kegel pro Sekunde entweder

1) einen Pendelschlag, oder
2) einen Hin- und Hergang machen soll?

Lösung. I. Bei Verwendung von Nr. 212 II und 174 erhält man

$$l = \frac{b^2 + 4h^2}{5h}$$

als Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Spitze.

II. Schreibt man dies in der Form

$$l = \tfrac{4}{5}\left(h + \tfrac{1}{4}\frac{b^2}{h}\right),$$

so ist die Konstruktionsweise unmittelbar einleuchtend.

III. Soll pro Sekunde ein Pendelschlag erfolgen, so mufs

$$h = \frac{20g}{17\pi^2}$$

sein; das ist (für $\pi = 3{,}14$ und $g = 9{,}81^m$)

$$h = 1{,}167^m,$$

während bekanntlich die Länge des mathematischen Sekundenpendels $0{,}994^m$ beträgt.

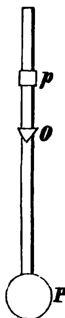
Hingegen hat man

$$h = 0{,}292^m$$

zu nehmen, wenn der Kegel in der Sekunde einen Hin- und Hergang ausführen soll.

Aufgabe 214. Das bekannte Metronom (Fig. 27) besteht aus einem prismatischen Stabe, auf welchem ein Laufgewicht verschiebbar ist und der an seinem unteren Ende mit einer Kugel in fester Verbindung steht. Er schwingt um einen Punkt (eine Schneide) O.

Fig. 27.



Es sei f der (als klein vorausgesetzte) Querschnitt des Stabes, Q sein Gewicht, b die Entfernung des Drehpunktes O vom oberen Stabende, P das Gewicht der Kugel, k ihr Halbmesser, $a + k$ die Entfernung ihres Centrums von O, endlich h die des laufenden Gewichtes p (welches als materieller Punkt gelten möge) ebenfalls von O.

Gesucht werden

I. die Länge l desjenigen mathematischen Pendels, welches dieselben Schwingungen macht;

II. derjenige Laufgewichtabstand h, bei welchem der Apparat in der Minute n Oscillationen vollbringt.

Lösung. I. Nr. 212 II führt auf

$$l = \frac{P[(a+k)^2 + \frac{2}{5}k^2] + ph^2 + \frac{1}{3}Q(a^2 - ab + b^2)}{P(a+k) - ph - \frac{1}{2}Q(b-a)},$$

bei dessen Herleitung das Resultat von 179 Anwendung findet.

II. Der gesuchte Laufgewichtabstand h ist durch die quadratische Gleichung

$$\frac{3600 g}{n^2 \pi^2} = \frac{P[(a+k)^2 + \frac{2}{5} k^2] + p h^2 + \frac{1}{3} Q (a^2 - ab + b^2)}{P(a+k) - p h - \frac{1}{2} Q (b-a)}$$

bestimmt.

Aufgabe 215. Ein allgemeiner Körper, welcher anfänglich die Winkelgeschwindigkeit c besessen hat, dreht sich um eine feste Achse, indem er dabei nur dem Einflusse gewisser Widerstände unterliegt, die sich zu einer am Hebelarm a wirkenden Kraft zusammensetzen, welche dem durchlaufenen Drehwinkel θ proportional ist und für die Einheit desselben den Wert k hat.

Man soll berechnen:

I. welche Winkelgeschwindigkeit w der Körper besitzt, nachdem von ihm der Winkel θ durchlaufen ist;

II. wie viel die gesamte Drehung beträgt;

III. zu welcher Zeit t er ein vorgeschriebenes θ zurückgelegt hat;

IV. in welchem Augenblicke T er stehen bleibt;

V. wie grofs Drehwinkel θ und Winkelgeschwindigkeit w zur Zeit t sind;

VI. wie die unter I bis V gefundenen Resultate lauten, wenn der sich drehende Körper ein Ring (Schwungrad) ist, erzeugt durch Rotation eines Rhombus, dessen Diagonalen $AC = 2q$, $BD = 2p$ sind und dessen Mittelpunkt von der zu AC parallelen Drehachse um d absteht;

VII. wie sie lauten, wenn statt jenes Ringes eine an der Spitze durchaus rechtwinklige, dreiseitige Pyramide vorliegt, deren Seitenkanten die Längen k_1, k_2, k_3 haben und welche sich um eine dieser drei Kanten dreht.

Lösung. Es ergeben sich folgende, meist sehr einfache Sätze aussprechende Resultate, in denen b die Abkürzung für $\sqrt{\frac{ak}{S}}$ ist:

I) $$w = \sqrt{c^2 - b^2 \theta^2};$$

II) $$\Theta = \frac{c}{b}$$

als Gesamtdrehung;

III) $$t = \frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{b}{c}\theta\right);$$

IV. $$T = \frac{\pi}{2b};$$

V. $$\theta = \frac{c}{b} \sin bt;$$

$$w = c \cos bt.$$

VI. Ist der sich drehende Körper der vorgeschriebene Ring, so hat man (nach Nr. 171)

$$b = \sqrt{\frac{2ak}{(p^2 + 2d^2)M}};$$

VII. ist er hingegen die genannte Pyramide, so gilt (nach Nr. 182) für die Drehung um die Kante k_1:

$$b = \sqrt{\frac{10ak}{(k_2{}^2 + k_3{}^2)M}};$$

für die um k_2:

$$b = \sqrt{\frac{10ak}{(k_1{}^2 + k_3{}^2)M}};$$

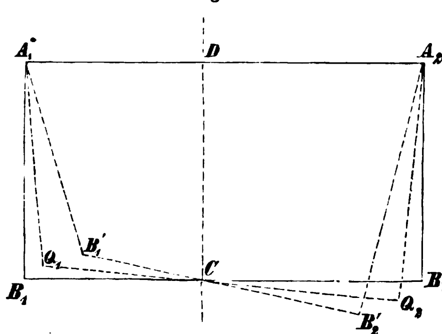
endlich für die um k_3:

$$b = \sqrt{\frac{10ak}{(k_1{}^2 + k_2{}^2)M}}.$$

Diese Werte von b sind in die unter I bis V angegebenen Gleichungen einzuführen.

Aufgabe 216. Ein stabförmiger Körper B_1B_2 (Fig. 28) ist durch zwei Fäden A_1B_1 und A_2B_2, deren jeder die Länge a hat, mit den festen Punkten A_1 und A_2 verbunden. (Bifilare Aufhängung.) P ist sein Gewicht, S sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse CD. Der Schwerpunkt liegt in C; CB_1 ist gleich b_1, CB_2 gleich b_2.

Fig. 28.



Der Körper wird aus der ursprünglichen Lage B_1B_2 in die andere $B'_1B'_2$ gebracht, welche aber von der ersten

so wenig abweicht, dafs für die Winkel $B_1 C B'_1 = \alpha$, $B_1 A_1 B'_1 = \beta_1$, $B_2 A_2 B'_2 = \beta_2$ der Bogen mit dem Sinus verwechselt werden darf.

Bezeichnet man für irgend eine Stellung $Q_1 Q_2$ des schwingenden Stabes $B_1 C Q_1$ mit θ, $B_1 A_1 Q_1$ mit ε_1, $B_2 A_2 Q_2$ mit ε_2, so ist

$$\varepsilon_1 = \frac{b_1}{a}\,\theta \text{ und } \varepsilon_2 = \frac{b_2}{a}\,\theta.$$

Ferner sind die in Q_1 und Q_2 herrschenden Fädenspannungen P_1 und P_2 leicht angebbar; desgleichen die tangential zurücktreibenden Kräfte R_1 und R_2.

Man soll nun (mit Vernachlässigung der Widerstände) berechnen, wie grofs der Ausschlagwinkel θ zur Zeit t ist, welche Winkelgeschwindigkeit w in diesem Augenblicke herrscht, welche Dauer T eine volle Hin- und Herschwingung hat und wie sich diese Zeit T zu derjenigen T_1 verhält, die dem Körper dann eigen sein würde, wenn er pendelförmig aufgehangen wäre.

Lösung. Für die Spannungen findet man

$$P_1 = \frac{b_2 P}{b_1 + b_2},\ P_2 = \frac{b_1 P}{b_1 + b_2};$$

für die tangential zurücktreibenden Kräfte

$$R_1 = P_1 \sin \varepsilon_1,\ R_2 = P_2 \sin \varepsilon_2$$

und kann dies durch

$$R_1 = P_1\, \varepsilon_1,\ R_2 = P_2\, \varepsilon_2$$

ersetzen.

Als Differentialgleichung der Drehbewegung ergiebt sich

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{b_1 b_2 P}{aS}\,\theta.$$

Wird zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{b_1 b_2 P}{aS}} = k$$

gesetzt, so liefert die Integration dieser Gleichung zunächst

$$\theta = A \sin kt + B \cos kt,$$

mithin

$$w = k\,(B \sin kt - A \cos kt);$$

nach Ermittelung der Werte der Konstanten A und B aber die sehr einfachen Bewegungsgesetze

$$\theta = \alpha \cos kt$$

und
$$w = k\alpha \sin kt.$$

Dabei ist Alles von da an gezählt, wo der Stab die Lage $B'_1 B'_2$ hat.

Hiernach wird θ zu α, für

$$t = 0, \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \ldots;$$

die Dauer eines Hin- und Herganges ist also

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

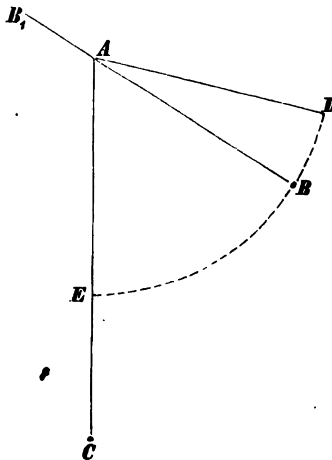
Bezeichnet h für den pendelförmig aufgehangenen Körper den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse, so gilt (wie aus Nr. 212 II gefolgert werden kann) die Beziehung

$$T = \sqrt{\frac{ah}{b_1 b_2}}\, T_1,$$

es ist daher $T = T_1$, wenn h zu $\frac{b_1 b_2}{a}$ wird.

Aufgabe 217. Um eine in A (Fig. 29) senkrecht zur Bildebene stehende Achse dreht sich ein sehr dünner, aber unbiegsamer Stab BB_1, welcher an dem einen Ende B eine kleine Kugel trägt. Er ist so balanciert, dafs er sich in der (horizontal zu denkenden) Bildfläche bewegt. Der stabförmige Teil des Apparates übt keinen Einflufs auf die Drehung aus; letztere entsteht vielmehr nur dadurch, dafs das Kugelcentrum B nach einem festen Punkte C (der in der Bildebene liegt) proportional der Kugelmasse M und umgekehrt proportional dem Abstande BC angezogen wird. CA ist gleich c, BA gleich a.

Fig. 29.



Der allgemeine Wert der Winkelgeschwindigkeit w des Apparates soll als Funktion des Ausschlagwinkels $\varepsilon = CAB$ berechnet werden und zwar unter der Voraussetzung, dafs die Kugel anfänglich in Ruhe unter dem Winkel $\alpha = CAD$ gestanden habe.

Lösung. Die Differentialgleichung der Drehbewegung ergiebt sich zu

$$w\,dw = \frac{ck^2}{a} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{2ac\cos\varepsilon - a^2 - c^2}\,d\varepsilon.$$

Dabei ist k^2 diejenige Anziehung, welche C auf die Masse 1 in der Entfernung 1 ausübt. Ferner hat man die Kugel so klein vorausgesetzt, dafs ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt gedacht werden darf, ihr Trägheitsmoment S also gleich $a^2 M$ ist. [Wäre die Kugel hingegen gröfser und r ihr Halbmesser, so müfste, nach Nr. 179, $\frac{1}{5}(5a^2 + 2r^2)\,M$ für S genommen werden.]

Aus obiger Gleichung folgt als Gesetz für die Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{k}{a}\sqrt{l\,\frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varepsilon}},$$

das ist so viel wie

$$w = \frac{k}{a}\sqrt{2\,l\,\frac{CD}{CB}}.$$

Hieraus erhellt sogleich die Natur der Bewegung.

Empfohlen sei es, diese Aufgabe auch als ein „Rollen auf vorgeschriebener Bahn“ zu lösen. Es gewährt dies eine Einsicht in den Zusammenhang zwischen denjenigen Gleichungen, die einerseits bei Bewegungen auf festen Bahnen (Capitel III) und andererseits bei Drehbewegungen gelten.

Aufgabe 218. Wie Nr. 217, doch mit folgenden Abweichungen:

Der Teil AB_1 des Apparates fehlt. Die Schwingungen erfolgen um eine in A befindliche horizontale Achse in einer Vertikalebene; es soll daher die Wirkung des Kugelgewichtes mit in Rechnung gezogen werden.

Das Centrum C der Anziehung liegt senkrecht unter A.

Lösung. Wird die Kugel wieder so klein vorausgesetzt, dafs ihre Masse im Mittelpunkte koncentrirt angenommen werden darf, so ist

$$w = \sqrt{\frac{2g}{a}(\cos\varepsilon - \cos\alpha) + \frac{k^2}{a^2}\,l\,\frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varepsilon}}$$

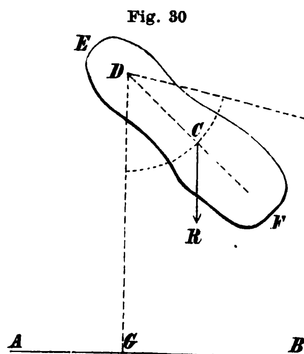
oder

$$w = \sqrt{\frac{2}{a^2}\left\{ag(\cos\varepsilon - \cos\alpha) + k^2 l\,\frac{CD}{CB}\right\}}$$

das Gesetz für die Winkelgeschwindigkeit.

Aufgabe 219. Ein ganz allgemeiner Körper EF (Fig. 30), dessen Trägheitsmoment S man kennt, ist um eine horizontal stehende Achse D drehbar. Auf denselben wirkt nichts weiter als senkrecht nach unten eine Kraft R, welche direkt proportional ist der Masse M, hingegen umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes u des Schwerpunktes C von der Horizontalebene AB. Ihr Angriffspunkt ist C und steht um a von D ab. Für M gleich 1 und u gleich 1 besitzt R die Intensität k.

Fig. 30



Anfänglich befindet sich der Körper in Ruhe und liegt derartig gegen AB, daſs die Verbindungsgerade der Punkte D und C den Winkel α mit der Senkrechten DG bildet. Die Länge der Letzteren ist b.

Berechnet soll werden, welche Winkelgeschwindigkeit w für den Ausschlag $\varepsilon = GDC$ herrscht.

Lösung. Man findet

$$w = \sqrt{\frac{2kM}{S}\left(\frac{1}{b - a\cos\varepsilon} - \frac{1}{b - a\cos\alpha}\right)},$$

wobei die geometrische Bedeutung der Nenner der Brüche beachtet werden möge.

Aufgabe 220. Die Kraft R (Fig. 30) soll wieder proportional der Masse sein, hingegen umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes u. Auſserdem möge die Schwere des Körpers mit in die Rechnung gezogen werden; alles Übrige aber sei wie bei der vorigen Aufgabe.

Zu berechnen sind

I. die Winkelgeschwindigkeit w als Funktion des Ausschlages $\varepsilon = GDC$;

II. diejenige (w_1), mit welcher die Senkrechte DG speciell dann durchlaufen wird, wenn b das Doppelte des Abstandes zwischen Drehachse und Schwerpunkt ist, und wenn der Körper sich anfänglich in horizontaler Lage befand.

Lösung. Es ergiebt sich

$$w^2 = \frac{2aM}{S}\left\{\frac{k}{2a}\left[\frac{1}{(b - a\cos\varepsilon)^2} - \frac{1}{(b - a\cos\alpha)^2}\right] + g\,(\cos\varepsilon - \cos\alpha)\right\}$$

und

$$w_1^2 = \frac{2aM}{S}\left(\frac{3k}{8a^3} + g\right).$$

C. Gegeben eine Beziehung zwischen der drehenden Kraft Q und der Winkelgeschwindigkeit w.

Aufgabe 221. Ein aus den Halbachsen a, b und c konstruiertes Ellipsoid hat einen Stofs erhalten, welchem zu Folge es sich mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit γ um seine c-Achse dreht. Die Widerstände der Bewegung geben zusammen eine am Ende der Halbachse a tangential wirkende Resultante W, welche mit der Winkelgeschwindigkeit w in gleichem Verhältnisse wächst und für die Einheit der letzteren den Wert k hat.

Man soll ermitteln

I. wie grofs w zur Zeit t ist;

II. welcher Drehwinkel θ in t Zeiteinheiten durchlaufen wird;

III. was aus den erhaltenen Formeln für w und θ folgt.

Lösung. Bei Benutzung der Abkürzung

$$\alpha = \frac{ak}{S}$$

lauten die Resutate:

I. $$w = \gamma e^{-\alpha t}$$

und

II. $$\theta = \frac{\gamma}{\alpha}\,(1 - e^{-\alpha t}),$$

wobei (nach Nr. 186) das Trägheitsmoment

$$S = \tfrac{4}{15}\,\pi\varepsilon abc\,(a^2 + b^2)$$

ist.

III. Die für w gefundene Gleichung lehrt, dafs die Winkelgeschwindigkeit zwar immer abnimmt, jedoch erst nach unendlich langer Zeit zu Null wird.

Aus dem Werte von θ folgt, dafs der Drehwinkel sich mehr und mehr der Grenze $\frac{\gamma}{\alpha}$ nähert.

Zwischen w und θ besteht die einfache Beziehung

$$w = \gamma - \alpha\theta.$$

Aufgabe 222. Mit einer starren, vertikalen Drehachse OZ sind drei materielle Punkte P_1, P_2, P_3, welche die Massen m_1, m_2, m_3 haben, in fester Verbindung durch die unveränderlichen Geraden r_1, r_2, r_3. In einer Ebene, welche (ebenso wie r_1, r_2, r_3) senkrecht zu OZ steht, wirkt eine Kraft A tangential zu einem mit a um die Drehachse konstruierten Kreise. Diese Kraft ist konstant, es stellen sich jedoch der Bewegung Widerstände entgegen, die proportional dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit w zunehmen, so dafs die Drehung durch

$$Q = A - kw^2$$

erfolgt. Sie beginnt zur Zeit Null vom Ruhezustande aus.

Gesucht werden die Winkelgeschwindigkeit w und der Drehwinkel θ zur Zeit t.

Lösung. Als Gesetz für die Winkelgeschwindigkeit erhält man:

$$w = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{e^{2\alpha\beta t} - 1}{e^{2\alpha\beta t} + 1}$$

oder

$$w = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha\beta t} - e^{-\alpha\beta t}}{e^{\alpha\beta t} + e^{-\alpha\beta t}};$$

als solches für den Drehwinkel:

$$\theta = \frac{1}{\alpha^2\beta} l \frac{e^{\alpha\beta t} + e^{-\alpha\beta t}}{2}.$$

Dabei ist

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{A}},$$

$$\beta = \frac{Aa}{S},$$

$$S = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2.$$

Den für w und θ gefundenen Werten können leicht Folgerungen und Untersuchungen angeschlossen werden, welche den bei Nr. 32 stehenden entsprechen. Es sei hiermit auf diese verwiesen.

Aufgabe 223. Ein allgemein gestalteter Körper, dessen Trägheitsmoment S man kennt, dreht sich um eine Achse infolge

eines Stofses, den er zur Zeit Null erhielt und welcher ihm die Anfangswinkelgeschwindigkeit γ erteilte.

Die Widerstände der Bewegung geben zusammen eine am Hebelarme a wirkende Resultante W, welche aus einem konstanten Teile A und aus einem veränderlichen besteht, der dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit w so proportional ist, dafs er für $w = 1$ die Stärke B hat.

Es soll berechnet werden

I. wie grofs w zur Zeit t ist;

II. welcher Drehwinkel θ bis zu diesem Augenblicke durchlaufen wird;

III. welche Zeit T verstreicht, bis der Körper stehen bleibt;

IV. wie grofs hierbei der Drehwinkel Θ ist;

V. wie sich aus den für w und θ unter I. und II. gefundenen Ausdrücken die einfacheren herleiten lassen, welche dann gelten, wenn nur der konstante erste Teil des Widerstandes wirkt;

VI. wie die unter I. bis V. gefundenen Resultate lauten, wenn der Körper ein gerader, hohler Kreiscylinder ist, der sich um seine geometrische Achse dreht, den äufseren Halbmesser a, den inneren b und die Höhe $\frac{1}{4}a$ hat.

Lösung. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{B}{A} = \alpha^2,$$

$$\frac{Aa}{S} = \beta,$$

so resultiert Folgendes:

I. $$w = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha\gamma \cos \alpha\beta t - \sin \alpha\beta t}{\cos \alpha\beta t + \alpha\gamma \sin \alpha\beta t};$$

II. $$\theta = \frac{1}{\alpha^2 \beta} l(\cos \alpha\beta t + \alpha\gamma \sin \alpha\beta t);$$

III. $$T = \frac{1}{\alpha\beta} \arctan \alpha\gamma;$$

IV. $$\Theta = \frac{1}{2\alpha^2 \beta} l(1 + \alpha^2 \gamma^2);$$

V. $$w = \gamma - \beta t \text{ und } \theta = \gamma t - \tfrac{1}{2} \beta t^2.$$

In Bezug auf die Herleitung dieser letzten Sätze möge IV unter Nr. 33 verglichen werden.

VI. Für den genannten Hohlcylinder ist

$$\beta = \frac{8A}{\pi \varepsilon (a^4 - b^4)};$$

dies würde in die vorhergehenden Gleichungen einzuführen sein.

D. Gegeben eine Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit *w* und der Zeit *t*, oder zwischen *w* und dem Drehwinkel θ, oder endlich zwischen θ und *t*.

Aufgabe 224. Aus den Halbachsen a und b ist eine elliptische Scheibe so dünn konstruiert worden, dafs sie als Fläche gelten kann. Sie soll sich um ihre grofse Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit w drehen, welche immer der dritten Potenz der verflossenen Zeit t proportional ist und für die Einheit derselben den Wert k hat.

I. Welcher Art mufs diejenige Kraft Q sein, die, an dem von der kleinen Halbachse b beschriebenen Kreise tangential wirkend, diese Bewegung erzeugt?

II. Wie verhalten sich die in verschiedenen Zeiten durchlaufenen (und von $t = 0$ an gerechneten) Drehwinkel zu einander?

Lösung. I. Die gesuchte Kraft mufs dem Quadrate der verflossenen Zeit proportional sein und für $t = 1$ die Intensität $\frac{3}{4} bkM$ haben (wobei M die Masse der Scheibe bedeutet).

II. Die durchlaufenen Drehwinkel verhalten sich wie die vierten Potenzen der verstrichenen Zeiten; es ergiebt sich nämlich leicht, dafs

$$\theta = \frac{1}{4} kt^4$$

ist.

Aufgabe 225. Ein Körper, welchem das Trägheitsmoment S zukommt, dreht sich um eine Achse D, in Folge der Wirkung einer unbekannten Kraft Q, die immer tangential zu einem mit h um D beschriebenen Kreise thätig ist. Zwischen dem durchlaufenen Drehwinkel θ und der Winkelgeschwindigkeit w besteht die Beziehung

$$\theta = \frac{1}{B^2}\left(Al\,\frac{A}{A - Bw} - Bw\right),$$

in welcher A und B konstante Gröfsen sind.

Man soll berechnen, welcher Art die Kraft Q ist.

Lösung. Die die Drehung hervorrufende Kraft Q besteht erstens aus einem unveränderlichen Teile $\frac{AS}{h}$ und zweitens aus einem anderen, welcher der Winkelgeschwindigkeit proportional ist, nämlich $\frac{BS}{h}\,w$. Letzterer ist negativ, man kann also sagen: es wirkt eine konstante Kraft und ein der Winkelgeschwindigkeit proportionaler Widerstand.

Aufgabe 226. Mit dem äufseren Halbmesser a, dem inneren b und der Höhe $\frac{1}{4}\,a$ ist ein gerader, hohler Kreiscylinder gebildet worden. Er dreht sich um seine geometrische Achse in Folge eines Stofses, den er zur Zeit Null erhielt und der ihm die Anfangswinkelgeschwindigkeit γ erteilte. Die Widerstände der Bewegung geben zusammen eine an der äufseren Peripherie tangential wirkende Resultante W, welche in einer nicht bekannten Art von der Winkelgeschwindigkeit w abhängt. Die Drehung erfolgt derartig, dafs der durchlaufene Winkel θ zu jeder Zeit t den Wert

$$\theta = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{A}{B}}\,l\left(\cos Ct + \gamma\sqrt{\frac{B}{A}}\sin Ct\right)$$

hat, worin A und B zwei Konstanten sind, C aber die Abkürzung für $\frac{8\sqrt{AB}}{\pi\varepsilon\,(a^4 - b^4)}$ ist.

In welcher Weise hängt der Widerstand W von der Winkelgeschwindigkeit, von A und von B ab?

Lösung. Es ergiebt sich

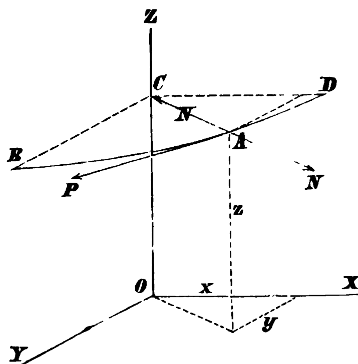
$$W = A + Bw^2;$$

der Widerstand besteht also aus einem konstanten Teile A und aus einem solchen, der wie die Quadrate der Winkelgeschwindigkeit zunimmt, für $w = 1$ aber die Stärke B hat.

E. Aufgaben über die Berechnung des von der Drehachse auszuhaltenden Druckes.

Aufgabe 227. Ein mit der Masse m versehener Punkt A (Fig. 31) ist mit der Drehachse OZ durch die gewichtlose, starre Gerade $CA = r$ verbunden. Es wirkt auf ihn die Kraft P tangential zu dem mit r um OZ beschriebenen Kreise BAD. Der von der Drehachse erlittene Druck N (oder, was dem absoluten Werte nach dasselbe ist, der von ihr geleistete Widerstand) soll berechnet werden.

Fig. 31.



Lösung. Zerlegt man (dem am Schlusse der „Zusammenstellung" auf Seite 182 Gesagten folgend) P in zwei Komponenten X und Y, welche im Sinne der positiven x, bezüglich in dem der positiven y wirken, ferner N in zwei (U und V), die in dem der negativen beiden Koordinaten thätig sind, so ergiebt sich sogleich

$$U = X - m\frac{d^2(r\cos\theta)}{dt^2}$$

und

$$V = Y - m\frac{d^2(r\sin\theta)}{dt^2},$$

wobei θ der Drehwinkel DCA ist.

Hieraus folgt, wenn die Winkelgeschwindigkeit w eingeführt wird,

$$1)\qquad U = X + mr\left(w^2\cos\theta + \sin\theta\,\frac{dw}{dt}\right),$$

$$2)\qquad V = Y + mr\left(w^2\sin\theta - \cos\theta\,\frac{dw}{dt}\right),$$

oder auch

$$3)\qquad U = X + m\left(w^2x + y\,\frac{dw}{dt}\right),$$

$$4)\qquad V = Y + m\left(w^2y - x\,\frac{dw}{dt}\right).$$

Man hat also auch den Achsendruck selbst, nämlich

$$N = \sqrt{U^2 + V^2}.$$

Aufgabe 228. Es wirken mehrere Massen, nämlich m_1, m_2, m_3, ... m_n an den Hebelarmen r_1, r_2, r_3, ... r_n, beeinflufst von den Kräften P_1, P_2, P_3, ... P_n. Alles Übrige ist wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

I. Welche Werte haben hier die Komponenten U und V des von der Drehachse auszuhaltenden Druckes?

II. Wo greifen sie an?

III. Was ändert sich, wenn das Massensystem ein stetig zusammenhängendes (ein Körper) wird?

IV. Unter welchen Umständen erleidet die Achse OZ (Fig. 31) bei der Drehung denselben Druck, wie während der Ruhe?

Lösung. I. Unter Beibehaltung der in der vorigen Lösung benutzten Bezeichnungen, findet man

$$1)\qquad U = \Sigma(X) + w^2\,\Sigma(mx) + \frac{dw}{dt}\,\Sigma(my),$$

$$2)\qquad V = \Sigma(Y) + w^2\,\Sigma(my) - \frac{dw}{dt}\,\Sigma(mx).$$

II. Die Abstände z_u und z_v der Angriffspunkte dieser Kräfte U und V von der xy-Ebene ergeben sich aus den Momentegleichungen

$$3)\qquad Uz_u = \Sigma(Xz) + w^2\,\Sigma(mxz) + \frac{dw}{dt}\,\Sigma(myz)$$

und

$$4)\qquad Vz_v = \Sigma(Yz) + w^2\,\Sigma(myz) - \frac{dw}{dt}\,\Sigma(mxz)$$

im Vereine mit 1) und 2).

III. Ist das System ein stetig zusammenhängendes (ein Körper), so wird m zum Massenelemente ($\varepsilon dx dy dz$) und die Summen in den beiden letzten Gliedern gehen in Integrale über. Man hat daher

$$5)\quad U = \Sigma(X) + w^2\int\!\!\int\!\!\int x\varepsilon\,dx\,dy\,dz + \frac{dw}{dt}\int\!\!\int\!\!\int y\varepsilon\,dx\,dy\,dz,$$

$$6)\quad V = \Sigma(Y) + w^2\int\!\!\int\!\!\int y\varepsilon\,dx\,dy\,dz - \frac{dw}{dt}\int\!\!\int\!\!\int x\varepsilon\,dx\,dy\,dz,$$

$$7)\quad Uz_u = \Sigma(Xz) + w^2\int\!\!\int\!\!\int xz\varepsilon\,dx\,dy\,dz + \frac{dw}{dt}\int\!\!\int\!\!\int yz\varepsilon\,dx\,dy\,dz,$$

$$8)\quad Vz_v = \Sigma(Yz) + w^2\int\!\!\int\!\!\int yz\varepsilon\,dx\,dy\,dz - \frac{dw}{dt}\int\!\!\int\!\!\int xz\varepsilon\,dx\,dy\,dz.$$

Wirken auf alle Punkte des Körpers Kräfte, so werden auch die in den ersten Gliedern stehenden Summen noch zu Integralen.

Bezeichnet man mit M die Gesamtmasse des stetig zusammenhängenden Systems, mit ξ, η und ζ die Koordinaten seines Schwerpunktes, mit D und E die bei den Trägheitsmomenten (Aufgabe 201) schon vorgekommenen Integrale

$$\int\int\int yz\varepsilon dxdydz \text{ und } \int\int\int xz\varepsilon dxdydz,$$

so lauten die Gleichungen 5) bis 8) einfacher

$$9) \qquad U = \Sigma(X) + w^2 M\xi + \frac{dw}{dt} M\eta,$$

$$10) \qquad V = \Sigma(Y) + w^2 M\eta - \frac{dw}{dt} M\xi,$$

$$11) \qquad Uz_u = \Sigma(Xz) + w^2 E + \frac{dw}{dt} D,$$

$$12) \qquad Vz_v = \Sigma(Yz) + w^2 D - \frac{dw}{dt} E.$$

IV. Der Druck wird während der Bewegung eben so stark sein, wie während der Ruhe, wenn die Achse OZ eine der Hauptachsen des Körpers ist; dann sind nämlich ξ, η, D und E gleich Null.

Aufgabe 229. Eine kleine Kugel A (Fig. 31 auf Seite 198), die als Punkt von der Masse 1 aufgefafst werden darf, ist durch eine starre, gewichtlose Gerade AC mit einer Drehachse OZ verbunden. Sie bewegt sich anfänglich mit der Winkelgeschwindigkeit 1 um diese Achse und unterliegt keiner anderen Kraftwirkung als einem Mittelwiderstande, welcher dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist und ursprünglich die Intensität k besafs. AC ist der Einheit gleich.

Man soll mit Benutzung der Lösung der Aufgabe 227 den Druck N, welchen die Drehachse erleidet,

I. als Funktion des von der Anfangslage aus gezählten Drehwinkels θ berechnen,

II. als Funktion der vom Bewegungsbeginne ab genommenen Zeit t.

Lösung. Die unter Nr. 227 entwickelten Gleichungen 1) und 2) liefern Folgendes:

Der Druck N verändert sich nach den Gesetzen

$$\dot{N} = e^{-2k\theta} = w^2$$

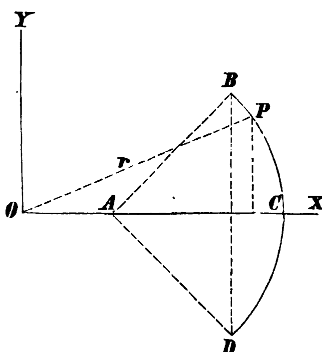
oder

$$N = \frac{1}{(1+kt)^2};$$

er ist also anfänglich gleich 1, nimmt stets ab, wird aber erst für unendlich grofse Drehwinkel zu Null.

Aufgabe 230. Der Kreisbogen BCD (Fig. 32) dreht sich um eine Achse, die in O senkrecht zu seiner Ebene steht, mit der Winkelgeschwindigkeit w, ohne dafs Kräfte oder Widerstände auf ihn wirken. Das Centrum A liegt um a von O entfernt, der Halbmesser ist c, der Centriwinkel 2α, der Querschnitt überall q, die Dichtigkeit durchweg ε.

Fig. 32.



Der Achsendruck N soll ermittelt werden

I. mit Benutzung der unter Nr. 228 abgeleiteten Gleichungen,

II. ohne dieselben.

Lösung. Nach Nr. 228 rechnend, findet man

$$N = w^2 M \xi,$$

(selbstverständlich in der Ebene des Kreisbogens angreifend), das ist (Teil I, Aufg. 54) so viel wie

$$N = w^2 M \frac{a\alpha + c \sin \alpha}{\alpha},$$

wobei $M = 2cq\alpha\varepsilon$.

II. Dasselbe ergiebt sich, wenn man für ein allgemein liegendes Massenelement P des Bogens die Centrifugalkraft bestimmt, letztere in zwei auf einander rechtwinklig stehende Komponenten zerlegt und diese Seitenkräfte für alle Elemente addiert (integriert).

Aufgabe 231. Wie Nr. 230, doch dreht sich statt des Kreisbogens BCD das gleichnamige Segment, welches die Dicke δ hat.

Lösung. Die unter I. und II. der vorhergehenden Nummer angegebenen Wege führen beide auf

$$N = w^2 M \xi$$

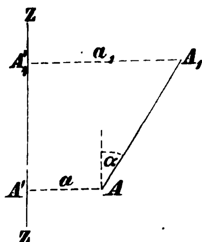
oder, näher ausgeführt, auf

$$N = \tfrac{1}{6} c^2 w^2 \delta \varepsilon \left[3a(2\alpha - \sin 2\alpha) + 4c \sin^3 \alpha\right],$$

welcher Druck selbstverständlich in der Ebene des Kreisabschnittes wirkt.

Aufgabe 232. Um eine vertikale Achse ZZ (Fig. 33) dreht sich ein Stab AA_1, welcher mit ihr in derselben Ebene liegt. Seine Länge ist L, seine Dichtigkeit konstant gleich ε, sein Querschnitt q ebenfalls unveränderlich und so klein, dafs der Stab als materielle Gerade aufgefafst werden darf. Es wirken keine Kräfte oder Widerstände.

Fig. 33.



Man soll mit Benutzung der Lösung der Aufgabe 228 den auf die Achse wirkenden Druck N nach Gröfse und Angriffspunkt bestimmen.

Lösung. Die letzten vier unter der genannten Nummer angegebenen Gleichungen (in denen E hier ein einfaches Integral ist) liefern

$$N = \tfrac{1}{2} w^2 M (a + a_1),$$

angreifend in der von A' aus gerechneten Höhe

$$z_u = \tfrac{1}{3} L \cos\alpha \frac{a + 2a_1}{a + a_1}.$$

Die Richtung des Druckes geht sonach im Allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt des Stabes AA_1, sondern durch den des Trapezes $A'A'_1A_1A$. Nur dann, wenn der Stab parallel, oder senkrecht zur Drehachse liegt, befinden sich beide Massenmittelpunkte in derselben Horizontale.

Aufgabe 233. Eine elliptische Scheibe, deren Dicke δ und Dichtigkeit ε unveränderlich sind, dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w um eine Gerade, welche, dem gröfsten Durchmesser parallel, in derselben Ebene liegt. Die Halbachsen der Ellipse sind a und b; der Mittelpunkt steht um k von der Drehachse ab.

Der von der Letzteren erlittene Druck N soll berechnet werden

I. mit Anwendung der unter Nr. 228 stehenden Gleichungen,

II. ohne diese.

Lösung. I. Nach Nr. 228 findet man

$$N = w^2 Mk,$$

der Richtung nach zusammenfallend mit derjenigen Geraden, welche, senkrecht zur Drehachse stehend, durch den Scheibenmittelpunkt geht. M ist dabei die Masse, also gleich $ab\pi\delta\varepsilon$.

II. Zu denselben Resultaten gelangt man auch ohne Anwendung jener Formeln, wenn man für ein Scheibenelement die Centrifugalkraft berechnet und alle diese Kräfte summiert. Es entsteht dabei ein Doppelintegral, dessen Wert sehr leicht ermittelt werden kann.

Aufgabe 234. Wie Nr. 233, nur liegt statt der elliptischen Scheibe eine massive Kugel vor, welche den Halbmesser a hat.

Lösung. Es ergiebt sich abermals

$$N = w^2 Mk,$$

wiederum so angreifend, als ob die Kugelmasse ($M = \frac{4}{3}\pi\varepsilon a^3$) im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Wie bei der Lösung der vorigen Aufgabe folgen diese Ergebnisse sowohl aus den unter Nr. 228 angegebenen Gleichungen, als auch dann, wenn man N durch Addition (dreifache Integration) der Centrifugalkräfte aller Kugelelemente berechnet.

Aufgabe 235. Um eine vertikale Achse dreht sich ein Stab AA_1, der nicht in der Ebene jener Achse liegt, mit der Winkelgeschwindigkeit w. Seine Länge ist $= L$, seine Dichtigkeit konstant $= \varepsilon$, sein Querschnitt q ebenfalls unveränderlich und so klein, dafs der Stab als materielle Gerade aufgefafst werden darf. Er wird auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt, derartig bezogen, dafs A in der xy-Ebene liegt, bestimmt durch die Abscisse a und die Ordinate b, dafs endlich A_1 in die xz-Ebene fällt, durch die Koordinaten a_1 und c daselbst seiner Lage nach bezeichnet.

Weder Kräfte noch Widerstände wirken.

Unter Benutzung der Lösung von Nr. 228 sollen die Druckkomponenten U und V nach Gröfse und Angriffspunkt berechnet werden; auch soll man angeben, wie sie sich zusammensetzen lassen.

Lösung. Die Gleichungen 9) und 10) unter Nr. 228 liefern

$$U = \frac{1}{2} w^2 M (a + a_1)$$

und

$$V = \tfrac{1}{2} w^2 Mb,$$

wobei $M = \varepsilon q L$ ist.

Bei der Bestimmung von z_u kommt man auf das Integral

$$E = \varepsilon q \sec \gamma \int_0^c \left(a + \frac{a_1 - a}{c} z\right) z dz$$

(in welchem γ den Winkel bezeichnet, den der Stab mit der Drehachse bildet) und findet schliefslich

$$z_u = \tfrac{1}{3} c \frac{a + 2a_1}{a + a_1} = \tfrac{1}{3} L \cos \gamma \frac{a + 2a_1}{a + a_1}.$$

Ebenso führt die Ermittelung von z_v zu dem Integrale

$$D = \varepsilon q \sec \gamma \int_0^c \frac{b(c - z)}{c} z dz$$

und somit auf

$$z_v = \tfrac{1}{3} c = \tfrac{1}{3} L \cos \gamma.$$

Da z_u und z_v verschieden sind, so lassen sich U und V nicht durch eine Einzelkraft ersetzen, wohl aber durch eine Kraft und ein Paar. Verlegt man nämlich U und V als U' und V' an den Schwerpunkt des Stabes, so liefern sie daselbst die Resultante

$$R = \tfrac{1}{2} w^2 M \sqrt{(a + a_1)^2 + b^2}$$

und zwei Kräftepaare $U U'_1$ und $V V'_1$.

Die senkrecht zu den Kräfterichtungen gemessenen Breiten dieser Letzteren sind

$$h_u = \tfrac{1}{6} L \frac{a - a_1}{a + a_1} \sin \alpha,$$

bezüglich

$$h_v = \tfrac{1}{6} L \sin \beta,$$

wenn durch α und β diejenigen Winkel bezeichnet werden, welche der Stab mit der Achse der x, bezüglich mit der der y, bildet.

Mithin hat man als Momente dieser Paare

$$U h_u = \tfrac{1}{12} w^2 ML (a - a_1) \sin \alpha$$

und

$$V h_v = \tfrac{1}{12} w^2 ML b \sin \beta,$$

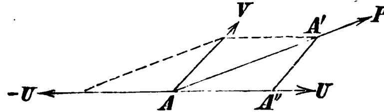
wonach nun beide noch vereinigt werden können.

Capitel VI.

Aufgaben über allgemeinere Bewegungen von Punktesystemen.

Zusammenstellung des im Nachfolgenden Angewendeten. Es sei A (Fig. 34) einer der Punkte eines Systemes, in welchem gewisse feste Verbindungen bestehen; er werde von einer Kraft P beeinflufst, die ihn in der Zeit dt von A nach A' treiben würde, wenn er frei wäre. Die wirklich eintretende Bewegung sei die von A nach A'', und U die sie erzeugende „wirksame Kraft".

Fig. 34.



Man kann sich dann P zerlegt denken in die Komponenten U und V, von denen die letztere die „verlorene Kraft" heifst.

Dieselbe Zerlegung ist an den übrigen Systempunkten möglich, auf welche die Kräfte P_1, P_2, . . . wirken; man erhält daher die „wirksamen Kräfte" U, U_1, U_2, . . . und die „verlorenen" V, V_1, V_2, ...

Die Punkte bewegen sich nun so, als ob sie frei wären und nur von den Kräften U, U_1, U_2, . . . beeinflufst würden. Dies ist aber nur möglich, wenn die V, V_1, V_2, . . . sich gegenseitig aufheben. Hierin liegt das „d'Alembert'sche Princip" oder das sogenannte „Princip der verlorenen Kräfte", nämlich der Satz:

Die Bewegung eines beliebigen Systemes von Punkten, die irgend wie mit einander verbunden sind und von irgend welchen Kräften beeinflufst werden, erfolgt stets derartig, dafs die in jedem Augenblicke verlorenen Kräfte im Gleichgewichte stehen.

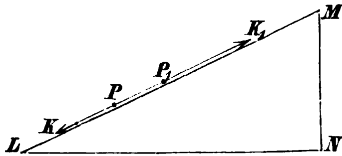
Oder auch, wie sofort aus Fig. 34 erhellt:

Die Bewegung geschieht stets so, dafs in jedem Augenblicke Gleichgewicht stattfindet zwischen den gegebenen Kräften (P, P_1, P_2, . . .) und denen, welche den wirksamen gleich und entgegengesetzt sind.

Mittelst dieses Principes, welches bei der Lösung der nachfolgenden Aufgaben als bekannt vorausgesetzt wird, läfst sich die Bewegung eines Systemes auf sein Gleichgewicht zurückführen, also die Dynamik auf die Statik.

Aufgabe 236. Auf einer schiefen Ebene, die durch das Dreieck LMN (Fig. 35) dargestellt ist, befinden sich zwei Punkte P und P_1 (kleine Kugeln), welche die Massen m und m_1 haben und mittelst eines undehnbaren Fadens verbunden sind. Auf den Ersten wirkt, aufser seiner Schwere, eine unveränderliche Kraft K in der Richtung von M nach L, auf den Zweiten (ausser der Schwere) eine ebenfalls konstante K_1 von L nach M zu.

Fig. 35.



Die Bewegung beginnt vom Ruhezustande aus zur Zeit Null, zu welcher sich P in L befindet, und erfolgt aufwärts. Widerstände liegen nicht vor. Die Ebene ist unter dem Winkel $\alpha = MLN$ gegen den Horizont geneigt.

Man soll, unter Bestimmung der „verloren gehenden Kräfte“ (siehe die „Zusammenstellung“), mit Hilfe des d'Alembert'schen Principes berechnen:

I. welche Geschwindigkeit v das Punktesystem zur Zeit t hat und welcher Weg x von ihm während derselben zurückgelegt wurde;

II. wie grofs die in dem Faden herrschende Spannung T ist.

Lösung. I. Die verlorene Kraft ist für m:

$$V = -K - mg \sin \alpha - m\frac{dv}{dt};$$

hingegen für m_1:

$$V_1 = K_1 - m_1 g \sin \alpha - m_1 \frac{dv}{dt}.$$

Hieraus folgt

$$v = Bt,$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{K_1 - K - g(m + m_1) \sin \alpha}{m + m_1} = B$$

gesetzt wird.

Ferner

$$x = \frac{1}{2} B t^2.$$

II. Als Fadenspannung ergiebt sich

$$T = \frac{K_1 m + K m_1}{m + m_1}.$$

Die für v, x und T gefundenen Gleichungen enthalten hübsche einfache Sätze.

Aufgabe 237. Wie Nr. 236; jeder der beiden Punkte P und P_1 wird aber auch noch von einer Kraft beeinflufst, welche der Masse und der Geschwindigkeit proportional ist, für mv oder $m_1 v = 1$ die Intensität A hat und in dem der Bewegungsrichtung entgegengesetzten Sinne wirkt.

In der bei der vorhergehenden Aufgabe bezeichneten Weise soll man die Geschwindigkeit v, den zurückgelegten Weg x und die Fadenspannung T als Funktionen der Zeit t berechnen, endlich auch aus den für v, x und T gefundenen Werten diejenigen herleiten, welche dann gelten, wenn A gleich Null ist.

Lösung. Zunächst ergiebt sich als Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{dv}{dt} + Av - B = 0,$$

wobei B dieselbe Bedeutung hat, wie in der vorhergehenden Lösung. Durch Integration folgt

$$v = \frac{B}{A}(1 - e^{-At});$$

es nähert sich hiernach die Geschwindigkeit für in's Unendliche wachsende t der Grenze $\frac{B}{A}$, die Bewegung wird also einer gleichförmigen immer ähnlicher.

Der von dem Punktesysteme zurückgelegte Weg ist

$$x = \frac{B}{A^2}(At + e^{-At} - 1);$$

die im Faden herrschende Spannung:

$$T = \frac{K_1 m + K m_1}{m + m_1}.$$

Setzt man in den für v und x gefundenen Werten A gleich

Null, so ergeben sich zunächst vieldeutige Formen, bei näherer Untersuchung derselben jedoch die bei der vorhergehenden Lösung (236) angegebenen Resultate.

Die Spannung ist von A unabhängig.

Aufgabe 238. In einem Systeme von Punkten, deren Massen m_1, m_2, m_3 . . . gegeben sind, bestehen gewisse bekannte feste Verbindungen. Auf die Masseneinheiten wirken an den einzelnen Punkten, im Sinne der positiven Koordinaten eines rechtwinkligen Systemes, die beschleunigenden Kräfte

$$X_1, \quad Y_1, \quad Z_1,$$
$$X_2, \quad Y_2, \quad Z_2,$$
u. s. w.

Zur Zeit t, welche vom Beginne der Bewegung an gezählt wird, befinden sich die Systempunkte an den Stellen

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1,$$
$$x_2, \quad y_2, \quad z_2,$$
u. s. w.

I. Mit Benutzung des d'Alembert'schen Principes und der sechs allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts (Teil I; „Zusammenstellung“ am Anfange des Capitels IV) sollen diejenigen sechs allgemeinen Gleichungen der Bewegung, welche für dieses Punktesystem Giltigkeit haben müssen, abgeleitet werden;

II. soll man angeben, was dieselben aussprechen.

Lösung. I. Die von dem ganzen Systeme verlorenen Kräfte ergeben sich (im Sinne der drei Koordinatenachsen genommen) zu

$$\sum\left\{m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right\},$$
$$\sum\left\{m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\},$$
$$\sum\left\{m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\};$$

die gesuchten Gleichungen der Bewegung lauten daher:

$$\sum\left\{m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right\}=0,$$

$$\sum\left\{m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\}=0,$$

$$\sum\left\{m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\}=0,$$

$$\sum\left\{y\left[m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right]-z\left[m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right]\right\}=0,$$

$$\sum\left\{z\left[m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right]-x\left[m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right]\right\}=0,$$

$$\sum\left\{x\left[m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right]-y\left[m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right]\right\}=0$$

und können, aus naheliegenden Gründen, auch in den Formen

1) $$\sum\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(mX),$$

2) $$\sum\left(m\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(mY),$$

3) $$\sum\left(m\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma(mZ),$$

4) $$\sum\left\{m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\}=\Sigma\{m(yZ-zY)\},$$

5) $$\sum\left\{m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\}=\Sigma\{m(zX-xZ)\},$$

6) $$\sum\left\{m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right\}=\Sigma\{m(xY-yX)\}$$

geschrieben werden..

II. Sie drücken aus, dafs die verlorenen Kräfte weder eine Verschiebung längs einer der Koordinatenachsen erzeugen, noch eine Drehung um eine derselben.

Aufgabe 239. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Bewegungsgleichungen Nr. 1) bis 3) eines Massensystems (siehe vorige Lösung) und denjenigen seines Schwerpunktes?

Lösung. Von den für die Schwerpunktskoordinaten ξ, η und ζ geltenden Werten ausgehend kommt man leicht auf

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma(mX),$$

$$M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma(mY),$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma(mZ),$$

wobei M die Gesamtmasse bedeutet. Dies enthält den Satz: Der Schwerpunkt eines jeden freien Massensystemes bewegt sich so, als ob alle Massen in ihm zu einem materiellen Punkte vereinigt wären und alle Kräfte parallel zu ihren eigentlichen Richtungen auf ihn wirkten. (Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.)

Aufgabe 240. Zwei in Bewegung befindliche Planeten, welche die Massen m_1 und m_2 haben, unterliegen nur ihrer gegenseitigen Anziehung, die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt. Für die Zeit Null ist der Ort des Schwerpunktes beider Körper bekannt; desgleichen seine Geschwindigkeit in Bezug auf Gröfse und Richtung.

Man soll mit Benutzung der Lösung der vorigen Aufgabe berechnen

I. wo sich dieser Massenmittelpunkt zur Zeit t befindet;

II. in was für einer Bahn er sich bewegt und

III. mit welcher Geschwindigkeit.

Lösung. I. Die unter Nr. 239 angegebenen Gleichungen führen zunächst auf

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B_1,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = C_1,$$

lehren also, dafs der Schwerpunkt im Sinne der Koordinatenachsen immer die konstanten Geschwindigkeiten A_1, B_1 und C_1 hat, nämlich diejenigen, welche er anfänglich besafs. Seine Lage ist daher bestimmt durch

$$\xi = A_1 t + A_2,$$
$$\eta = B_1 t + B_2,$$
$$\zeta = C_1 t + C_2,$$

in welchen Ausdrücken A_2, B_2 und C_2 die Anfangskoordinaten bedeuten.

II. Die Bahn ist eine gerade Linie; ihre xy-Projektion bildet mit der x-Achse den Winkel $arctan \frac{B_1}{A_1}$ und schneidet auf der y-Achse die Strecke $\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1}$ ab; ebenso schliefst die xz-Projektion mit der erstgenannten Achse den Winkel $arctan \frac{C_1}{A_1}$ ein und trifft die zweitgenannte im Abstande $\frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1}$ vom Koordinatenanfange.

III. In dieser geradlinigen Bahn läuft der Schwerpunkt mit der unveränderlichen Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.$$

Aufgabe 241. Wie Nr. 240; doch sind nicht zwei, sondern n Planeten vorhanden, und es ist die Anziehung irgend eine Funktion der gegenseitigen Entfernung.

Lösung. Da auch hier (wie bei der vorigen Aufgabe) die $\Sigma(mX)$, $\Sigma(mY)$ und $\Sigma(mZ)$ gleich Null sind, wie sich leicht beweisen läfst, so ergeben sich ganz dieselben Resultate.

Aufgabe 242. Auf ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem sind zwei Körper bezogen (Punkte, denen die Massen m_1 und m_2 zukommen). Sie ziehen sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetze an und unterliegen aufserdem der Wirkung einer Kraft, welche im Sinne der negativen z thätig ist und die Masseneinheit konstant mit der Intensität K beeinflufst. Die Koordinaten der Orte beider Körper sind für die Zeit Null bekannt; ferner kennt man die Achsengeschwindigkeiten des Schwerpunktes des Massensystems für diese Zeit.

Unter Anwendung der Lösung der Aufgabe 239 soll ermittelt werden, wo sich der Schwerpunkt zur Zeit t befindet, mit welcher Geschwindigkeit und in was für einer Bahn er sich bewegt.

Lösung. Im Sinne der x und y rückt der Massenmittelpunkt gleichförmig vor, nämlich mit den Geschwindigkeiten

$$v_\xi = A_1,$$

und

$$v_\eta = B_1,$$

die er ursprünglich hatte; in der Richtung der positiven z hingegen mit

$$v_\zeta = -Kt + C_1.$$

Hierdurch ist auch die Bahngeschwindigkeit v bestimmt, weil

$$v = \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2}$$

sein mufs.

Die Koordinaten des Ortes sind zur Zeit t

$$\xi = A_1 t + A_2,$$
$$\eta = B_1 t + B_2,$$
$$\zeta = -\tfrac{1}{2} Kt^2 + C_1 t + C_2;$$

dabei lassen sich die Anfangswerte A_2, B_2 und C_2 sogleich aus denen herleiten, welche man für die ursprünglichen Lagen der Massen m_1 und m_2 der Aufgabe nach kennt.

Die xy-Projektion der Bahn ist eine Gerade, deren Gleichung sich ergiebt, wenn aus den vorstehenden Werten von ξ und η die Zeit t eliminiert wird. Die beiden anderen Projektionen sind Parabeln; ihre Gleichungen erhält man auf die analoge Weise, nämlich dadurch, dafs man t aus denjenigen Ausdrücken wegschafft, welche für ξ und ζ, bezüglich η und ζ, gefunden worden sind.

Aufgabe 243. Drei unter einander durch gewichtlose, starre gerade Linien verbundene Massen m_1, m_2, m_3, befinden sich zur Zeit Null an denjenigen Stellen des Raumes in Ruhe, deren rechtwinklige Koordinaten a_1, b_1, c_1, bezüglich a_2, b_2, c_2 und a_3, b_3, c_3 sind. Auf jede der Massen wirkt ihre Schwere im Sinne der negativen z; aufserdem, in der Richtung der positiven x, eine beschleunigende Kraft, welche der Zeit t proportional ist und für die Einheit der letzteren die Intensität k hat.

Verlangt wird das in der vorhergehenden Aufgabe Genannte.

Lösung. Im Sinne der positiven x bewegt sich der Schwerpunkt des Systemes mit einer Geschwindigkeit, welche dem Quadrate der verflossenen Zeit proportional ist und für $t = 1$ den Wert $\frac{1}{2}k$ besitzt; in dem der y findet gar keine Bewegung statt (was auch ohne Rechnung klar ist); in dem der negativen z nimmt die Geschwindigkeit in demselben Verhältnisse zu, wie die Zeit und ist für die Einheit der letzteren gleich g. (Freier Fall.)

Als Bahngeschwindigkeit hat man hiernach

$$v = \tfrac{1}{2} t \sqrt{4g^2 + k^2 t^2}.$$

Die Koordinaten des Ortes sind zur Zeit t:

$$\xi = \alpha + \tfrac{1}{6} k t^3,$$
$$\eta = \beta,$$
$$\zeta = \gamma - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

wobei

$$\alpha = \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$\beta = \frac{b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$\left[\gamma = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.\right.$$

Was die Bahn anlangt, so erkennt man zunächst, dafs sie in einer Ebene liegen mufs, die (im Abstande β) parallel ist zu der der xz; ihre Gleichung, oder die ihrer Vertikalprojektion, lautet

$$\zeta = \gamma - \tfrac{1}{2} g \left[\frac{6}{k}(\xi - \alpha)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Aufgabe 244. Es soll mit Benutzung der in der Aufgabe 238 angegebenen allgemeinen Gleichungen bewiesen werden, dafs jedes sich bewegende freie Punktesystem, in welchem auf jeden Punkt stetige beschleunigende Kräfte X_1, Y_1, Z_1 etc. wirken, sich um seinen Schwerpunkt gerade so dreht, als ob er fest wäre.

Lösung. Die sich auf Drehung beziehenden allgemeinen Bewegungsgleichungen sind die unter 4), 5) und 6) bei Nr. 238 angeführten.

Es seien zur Zeit Null x, y und z die Koordinaten eines allgemeinen mit der Masse m versehenen Punktes der Verbindung in Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Anfang mit dem Schwerpunkte zusammenfallen möge. Nach Verlauf der Zeit t soll Letzterer an eine Stelle gekommen sein, deren Koordinaten ξ, η, ζ sind. Durch diese neue Lage des Schwerpunktes werde ein zweites Achsensystem gelegt, gleichgerichtet zum ersten. Bezüglich dieses neuen Systemes mögen die Koordinaten von m mit x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden. Die auf die Drehung um die x-Achse sich beziehende Gleichung 4) der Nr. 238 lautet dann

$$\sum\left\{m\left[(\eta + y_1)\frac{d^2\zeta + d^2 z_1}{dt^2} - (\zeta + z_1)\frac{d^2\eta + d^2 y_1}{dt^2}\right]\right\}$$
$$= \Sigma\{m[(\eta + y_1) Z - (\zeta + z_1) Y]\}.$$

Besser geordnet (um zu zeigen, daſs die ξ, η und ζ verschwinden) giebt dies

$$\sum\left\{m\left(\eta\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\,\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\right\}+\sum\left\{m\left(\eta\,\frac{d^2z_1}{dt^2}-\zeta\,\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\right\}$$

$$+\sum\left\{m\left(y_1\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}-z_1\,\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\right\}+\sum\left\{m\left(y_1\,\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\,\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\right\}$$

$$=\Sigma[m(\eta Z-\zeta Y)]+\Sigma[m(y_1Z-z_1Y)].$$

Für alle Punkte des Massensystems sind ξ, η und ζ dieselben; man kann also das erste Glied der linken Seite der Gleichung schreiben:

$$\eta\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}\,\Sigma(m)-\zeta\,\frac{d^2\eta}{dt^2}\,\Sigma(m)$$

und das erste der rechten:

$$\eta\,\Sigma(mZ)-\zeta\,\Sigma(mY);$$

diese beiden Werte sind einander gleich.

Das zweite Glied links kann in der Form

$$\eta\sum\left(m\,\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)-\zeta\sum\left(m\,\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)$$

gegeben werden; ebenso das dritte in der Gestalt

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}\sum(my_1)-\frac{d^2\eta}{dt^2}\sum(mz_1).$$

Da nun das Koordinatensystem den Schwerpunkt als Ursprung hat, so sind die Summen $\Sigma(my_1)$ und $\Sigma(mz_1)$ gleich Null; mithin auch die anderen $\sum\left(m\,\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)$ und $\sum\left(m\,\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)$.

Die vorstehende Gleichung lautet daher

$$\sum\left\{m\left(y_1\,\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\,\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\right\}=\Sigma\{m(y_1Z-z_1Y)\}.$$

Hiermit ist bewiesen, daſs die Drehung um die x-Achse gerade so erfolgt, als ob der Schwerpunkt fest wäre.

Der Nachweis in Bezug auf die beiden anderen Achsen läſst sich eben so führen.

Aufgabe 245. Zwei Massen m_1 und m_2, welche sich zur Zeit Null an den durch die rechtwinkligen Koordinaten a_1 und b_1, bezüglich a_2 und b_2, bestimmten Stellen einer Vertikalebene in Ruhe

befunden haben und durch eine starre, gewichtlose Gerade von der Länge a verbunden sind, unterliegen nur der Einwirkung ihrer Schwere, die in der Richtung der negativen y erfolgt. Die Natur derjenigen Bewegung, welche dieses Massensystem annehmen muſs, ist (als freier Fall) vollkommen bekannt; man soll die „allgemeinen Gleichungen der Bewegung" (Lösung der Aufg. 238, bezüglich 239) zur Anwendung bringen und nachsehen, ob und in welcher Weise die mittelst derselben sich ergebenden Eigenschaften der vorliegenden Bewegung mit ihrer voraus bekannten Art übereinstimmen.

Lösung. Nach Nr. 238 hat man als Differentialgleichungen der Bewegung

$$1)\quad m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=0,$$

$$2)\quad m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}=-g(m_1+m_2),$$

$$3)\quad m_1\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)+m_2\left(x_2\frac{d^2y_2}{dt^2}-y_2\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)=-g(m_1x_1+m_2x_2),$$

in denen x_1 und y_1 die Koordinaten von m_1, hingegen x_2 und y_2 die von m_2 zur Zeit t sind.

Aus 1) folgt zunächst

$$m_1v_{x_1}+m_2v_{x_2}=0,$$

wobei v_{x_1} und v_{x_2} diejenigen Geschwindigkeiten bedeuten, welche die Massen m_1 und m_2 im Sinne der positiven x haben; nachher:

$$m_1x_1+m_2x_2=m_1a_1+m_2a_2.$$

Dies stimmt mit der Natur des freien Falles offenbar ganz überein.

Dieselbe Uebereinstimmung zeigen auch die Gleichungen

$$m_1v_{y_1}+m_2v_{y_2}=-g(m_1+m_2)t$$

und

$$m_1y_1+m_2y_2=-\tfrac{1}{2}g(m_1+m_2)t^2+m_1b_1+m_2b_2,$$

welche aus 2) folgen und in deren erster v_{y_1} und v_{y_2} die Geschwindigkeiten von m_1 und m_2 im Sinne der positiven y sind.

Endlich folgen aus 3) die Gleichungen

$$m_1(x_1v_{y_1}-y_1v_{x_1})+m_2(x_2v_{y_2}-y_2v_{x_2})=-g(m_1a_1+m_2a_2)t$$

und

$$m_1S_1+m_2S_2=-\tfrac{1}{4}g(m_1a_1+m_2a_2)t^2,$$

in deren letzter S_1 und S_2 die von den Leitstrahlen beschriebenen (und von der Anfangslage aus gerechneten) Flächen bedeuten. Auch dies widerstreitet nicht, wie sich leicht nachweisen läfst, der Natur des freien Falles.

Benutzt man statt der Gleichungen 1) und 2) die aus Nr. 239 folgenden und für die Bewegung des Schwerpunktes geltenden

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$$

und

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2\eta}{dt^2} = -g(m_1 + m_2),$$

so liefern diese:

$$v_\xi = 0,\ v_\eta = -gt,\ \xi = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} \text{ und } \eta = \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m_1 + m_2} - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

was sich ebenfalls mit der ohne Rechnung bekannten Art der Bewegung in Übereinstimmung befindet.

Aufgabe 246. Wie Nr. 245, doch mit folgenden Änderungen: Auf m_1 wirkt im Sinne der positiven x eine beschleunigende Kraft, welche der Zeit t proportional ist und in dem Augenblicke $t = 1$ die Intensität A_1 hat; im Sinne der positiven y eine solche, welche sich proportional dem Quadrate von t ändert und zur Zeit 1 den Wert B_1 besitzt. Auf m_2 sind zwei beschleunigende Kräfte ganz in derselben Weise thätig, nur mit dem Unterschiede, dafs sie zur Zeit 1 die Intensitäten A_2, bezüglich B_2, haben. Die Schwere wirkt nicht.

Es sollen die unter Nr. 238 und 239 angegebenen allgemeinen Gleichungen benutzt werden, um Eigenschaften derjenigen Bewegungsart zu ermitteln, welche das Massensystem annimmt.

Lösung. Die unter Nr 239 angeführten Gleichungen liefern sofort für die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes im Sinne der Achsen:

$$v_\xi = \tfrac{1}{2} k_1 t^2,$$
$$v_\eta = \tfrac{1}{3} k_2 t^3,$$

wobei $k_1 = \dfrac{A_1 m_1 + A_2 m_2}{m_1 + m_2}$ ist und $k_2 = \dfrac{B_1 m_1 + B_2 m_2}{m_1 + m_2}$; sodann, mit Benutzung der Abkürzungen $\dfrac{a_1 m_1 + a_2 m_2}{m_1 + m_2} = \alpha$ und $\dfrac{b_1 m_1 + b_2 m_2}{m_1 + m_2} = \beta$,

für seine Koordinaten

$$\xi = \tfrac{1}{6} k_1 t^3 + \alpha,$$
$$\eta = \tfrac{1}{12} k_2 t^4 + \beta;$$

die Bahn hat daher die Gleichung

$$\eta = \tfrac{1}{12} k^2 \left[\frac{6}{k_1}(\xi - \alpha)\right]^{\frac{4}{3}} = \beta.$$

Mit derselben Leichtigkeit führt das bei Nr. 238 Angegebene (unter Beibehaltung der in der vorigen Lösung verwendeten Bezeichnungen) auf

$$m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2} = \tfrac{1}{2}(A_1 m_1 + A_2 m_2) t^2,$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \tfrac{1}{6}(A_1 m_1 + A_2 m_2) t^3 + a_1 m_1 + a_2 m_2,$$
$$m_1 v_{y_1} + m_2 v_{y_2} = \tfrac{1}{3}(B_1 m_1 + B_2 m_2) t^3,$$
$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = \tfrac{1}{12}(B_1 m_1 + B_2 m_2) t^4 + b_1 m_1 + b_2 m_2.$$

Alle diese Gleichungen enthalten hübsche leicht in Worte zu fassende Bewegungsgesetze.

Aufgabe 247. Zwei Planeten (Punkte), deren Massen m_1 und m_2 sind, ziehen sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetze an und unterliegen aufserdem noch, nach demselben Gesetze, der Anziehung eines festen Centralkörpers (Punktes), dessen Masse m ist. Der Letztere wird als Anfang eines rechtwinkligen Koordinatensystemes genommen, bezogen auf welches die beiden Planeten zur Zeit t durch x_1, y_1, z_1, bezüglich x_2, y_2, z_2, ihrer Lage nach bestimmt werden. Die gegenseitige Entfernung derselben heifse allgemein u; der Abstand des ersten Planeten vom Centralkörper werde r_1, der des zweiten r_2 genannt. Wenn sich nun die beiden Planeten bewegen, so beschreiben ihre Leitstrahlen r_1 und r_2 im Raume gewisse Flächen, deren Inhalte S_1 und S_2 heifsen und von der Zeit $t = 0$ an gerechnet werden mögen. Wir projicieren diese Flächen auf die yz-, xz-, xy-Ebene und nennen die Inhalte der Projektionen U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2.

Es sollen nun die Gleichungen 4) bis 6) der Lösung der Aufgabe 238 auf die Bewegung des vorliegenden Massensystems angewendet und soll eine Eigenschaft dieser Bewegung ermittelt werden, indem man die U, V und W bei der zweiten Integration der genannten Gleichungen mit in die Rechnung hineinnimmt und herleitet, nach welchem Gesetze diese Flächenprojektionen beschrieben werden.

Lösung. Die X, Y und Z sind leicht zu ermitteln; mit ihnen hat man dann auch die auf den rechten Seiten der erwähnten drei Gleichungen vorkommenden Summen, findet nämlich, dafs sie verschwinden; hierdurch gelangt man zu drei Differentialgleichungen, die sich, wenn die U, V und W eingeführt werden und die Beziehungen

$$dU_1 = \frac{1}{2}(y_1 dz_1 - z_1 dy_1)$$

etc. gehörige Beachtung finden, ohne Schwierigkeiten integrieren lassen. Sie liefern die interessanten und leicht in Worte zu fassenden Gesetze:

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 = At,$$
$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = Bt,$$
$$m_1 W_1 + m_2 W_2 = Ct,$$

in denen A, B und C konstante Gröfsen sind.

Aufgabe 248. Wie Nr. 247, doch mit folgenden Unterschieden: Es liegen n Planeten vor, die mit den Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ versehen sind; der Centralkörper fehlt; die gegenseitige Anziehung ist ganz allgemein irgend eine Funktion der Entfernung.

Lösung. Zieht man zunächst nur zwei der Planeten in Betracht, erweitert dann aber das Gefundene auf alle n, so gelangt man wieder leicht zu den für die rechten Seiten der Gleichungen 4) bis 6) von Nr. 238 nötigen Summen; dieselben sind auch hier gleich Null. Das bei der vorigen Lösung Angedeutete benutzend, findet man schliefslich (unter Beibehaltung der in Nr. 247 eingeführten Bezeichnungen) die wichtigen Sätze

$$\Sigma(m\,U) = At,$$
$$\Sigma(m\,V) = Bt,$$
$$\Sigma(m\,W) = Ct,$$

welche das „Princip der Erhaltung der Flächen“ ausdrücken.

Aufgabe 249. Es soll untersucht werden, ob der zu Ende der vorigen Lösung gefundene Satz auch dann noch gilt, wenn die Planeten aufser ihrer gegenseitigen Anziehung noch einer anderen unterliegen, welche von einem im Koordinatenanfange stehenden Centralkörper (Punkt) herrührt und ebenfalls irgend eine Funktion der Entfernung ist.

Lösung. Der Einflufs des Centralkörpers ändert, wie sich leicht nachweisen läfst, nichts an dem Nullwerden der in der vorigen Lösung erwähnten Summen; das oben gefundene Gesetz besteht also auch hier.

Aufgabe 250. Gegeben ist ein System von Massen m_1, m_2, $m_3, \ldots m_n$; bekannt sind ferner die auf die Masseneinheiten in den Richtungen der positiven Koordinaten eines rechtwinkligen Systemes wirkenden Komponenten X_1, Y_1, Z_1, bezüglich X_2, Y_2, Z_2 u. s. w. sämtlicher Kräfte; gefragt wird nach der Summe der mechanischen Arbeiten $[\frac{1}{2}\,\Sigma\,(m\,v^2)]$ und nach denjenigen nächsten Folgerungen, die sich an das gefundene Resultat in Bezug auf die lebendige Kraft des Massensystemes knüpfen.

Lösung. Man findet

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(mv^2) = \Sigma\Big[m\int(Xdx + Ydy + Zdz)\Big] + Const,$$

wobei die Integration sich auf die Zeit bezieht, so dafs auch geschrieben werden kann

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(mv^2) - \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(mv_0^{\,2}) = \Sigma\left[m\int_{t=t_0}^{t=t}(Xdx + Ydy + Zdz)\right].$$

Ist $Xdx + Ydy + Zdz$ das vollständige Differential einer Funktion F der Koordinaten, so läfst sich die Integration ausführen; man kann dann also die Zunahme der lebendigen Kraft berechnen, wenn für den Anfang und das Ende des in Betracht kommenden Zeitraumes der Ort aller Punkte bekannt ist. So oft das System durch die nämliche Lage geht, wird die Summe der lebendigen Kräfte wieder dieselbe.

Wenn $Xdx + Ydy + Zdz$ gleich Null ist, so hat $\Sigma\,(mv^2)$ unveränderliche Gröfse. (Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.)

Aufgabe 251. Eine Kugel (Punkt) wird proportional ihrer Masse m und der n^{ten} Potenz der Entfernung senkrecht gegen eine Ebene angezogen. Im Abstande h von der Letzteren hat sie in beliebiger Richtung die Geschwindigkeit c, und in der Entfernung 1 ist die Beschleunigung der Anziehung gleich k. Widerstände finden nicht statt.

Durch Anwendung des bei der vorhergehenden Lösung erhaltenen Satzes von der lebendigen Kraft soll man diejenige Geschwindigkeit v berechnen, welche die Kugel dann besitzt, wenn der Abstand h sich bis auf z vermindert hat.

Man soll ferner das gefundene Resultat auf den Fall anwenden, dafs die vorliegende Anziehung die konstante Schwere der Kugel ist, und auf den anderen, dafs diese Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt.

Lösung. Für $n = -1$ ist

$$v = \sqrt{c^2 + 2kl\frac{h}{z}};$$

für $n \gtrless -1$ hingegen

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{2k}{n+1}(h^{n+1} - z^{n+1})}.$$

Wenn nur die unveränderliche Schwere wirkt, so wird hieraus das sehr bekannte

$$v = \sqrt{c^2 + 2g(h - z)};$$

liegt das Newton'sche Anziehungsgesetz vor, so ist

$$v = \sqrt{c^2 + 2k\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{h}\right)}.$$

Aufgabe 252. Wie Nr. 80; doch soll nur die Bahngeschwindigkeit v des sich bewegenden Punktes berechnet werden und zwar durch Benutzung des unter Aufgabe 250 gefundenen Satzes von der lebendigen Kraft.

Lösung. Die beschleunigenden Kräfte sind nach der zu Nr. 80 gegebenen Lösung bekannt; führt man ihre Werte ein in die unter 250 dagewesene Gleichung, so folgt sogleich

$$v = \pm k\sqrt{2by + 3(b^2 - x^2 - y^2)}.$$

Aufgabe 253. Für den unter Nr. 99 näher bezeichneten beweglichen Punkt soll die Geschwindigkeit v wiederum durch Anwendung des Satzes von der Summe der mechanischen Arbeiten (250) abgeleitet werden.

Lösung. Es ergiebt sich alsbald das unter Nr. 99 angeführte Resultat.*

Aufgabe 254. Jede der zwei Massen m_1 und m_2, die ein unveränderliches System bilden, wird von einer Ebene derartig abgestofsen, dafs diese Abstofsung dem Quadrate der Entfernung von der Ebene umgekehrt proportional ist und für die Einheit dieses Abstandes die Beschleunigung k erteilt. Anfänglich befinden sich die beiden Massen in den Entfernungen a_1 und a_2 (von der Ebene) in Ruhe.

Welche lebendige Kraft besitzt das System, wenn die Massen um z_1 bezüglich z_2, von der Ebene abstehen?

Wie grofs ist diese lebendige Kraft dann, wenn nicht zwei Massen, sondern deren n vorliegen, die sich anfänglich in den Abständen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ in Ruhe befunden haben?

Lösung. Das in der Lösung zu Nr. 250 Angegebene führt auf

$$\Sigma(mv^2) = 2k\left\{m_1\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{z_1}\right) + m_2\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{z_2}\right)\right\}$$

als Gröfse der gesuchten lebendigen Kraft. In der Form

$$\Sigma(mv^2) = 2k\sum\left\{m\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right)\right\}$$

geschrieben, gilt der Ausdruck zugleich für n Massen, nur dafs sich dann das Summenzeichen nicht blofs auf zwei, sondern auf n Glieder erstreckt.

Aufgabe 255. Drei auf einander senkrechte Ebenen stofsen jede der Massen m_1, m_2, m_3, welche unter einander fest verbunden sind, derartig ab, dafs diese Abstofsung immer der Entfernung von der betreffenden Ebene proportional ist und für die Einheit dieser Entfernung die Beschleunigung A^2 erteilt. Anfänglich befinden sich die drei Massen in bekannten Abständen von den drei Ebenen in Ruhe.

* Man erkennt leicht, in welcher Weise der in den vorhergehenden Capiteln enthaltene Stoff sich benutzen läfst, um (wie dies bei Nr. 251, 252 und 253 geschehen ist) Aufgaben zu bilden, die mittelst der in diesem sechsten Capitel dagewesenen allgemeinen Sätze gelöst werden können; auch wird man bemerken, dafs diese allgemeinen Sätze bei vielen Lösungen in den vorhergehenden Capiteln (wenn auch versteckt) benutzt worden sind.

Es soll berechnet werden, welche lebendige Kraft das System in jeder beliebigen Stellung besitzt und zwar sowohl wenn nur drei, als auch wenn allgemein n Massen vorliegen.

Lösung. Bezeichnet man die Abstände der drei Massen m_1, m_2, m_3 von dem gemeinschaftlichen Punkte der abstofsenden Ebenen mit r_1, r_2, r_3 und die anfänglichen Werte dieser Entfernungen mit p_1, p_2, p_3, so ist (nach Nr. 250)

$$\Sigma(mv^2) = A^2\left\{m_1(r_1^2 - p_1^2) + m_2(r_2^2 - p_2^2) + m_3(r_3^2 - p_3^2)\right\}$$

oder

$$\Sigma(mv^2) = A^2\,\Sigma\left\{m(r^2 - p^2)\right\},$$

wobei letzteres sowohl für drei, als auch allgemein für n Massen Giltigkeit hat.

